Esame di Matematica per Architettura
26 settembre 2017

	Es. 1			Es. 2	Es. 3			Es. 4
	1.a	1.b	1.c		3.a	3.b	3.c	
Punti								
su max.	2	2	5	6	5	4	4	5

Esercizio 1. a) Si dia la definizione di *applicazione lineare.*
b) Si dia la definizione di *nucleo* di un'applicazione lineare.
c) Si dica, giustificando la risposta, per quali valori del parametro t esiste un'applicazione lineare

$$\phi\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$$

tale che

$$\phi\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \phi\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \phi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

e

$$\phi\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\t\end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 4 e siano U e W sottospazi di V di dimensione 3. Si provi che la dimensione di $U \cap W$ è almeno 2.

Esercizio 3. a) Si determini per quali valori del parametro λ in $\mathbf{R}$, il seguente sistema ha un'unica soluzione.

$$\begin{cases} \lambda x + 2y - 2z & = & \lambda \\ -16x - 4y + \lambda z & = & -4 \\ 8x + y + z & = & 2 \end{cases}$$

b) Si determini l'insieme delle soluzioni nel caso in cui $\lambda = 0$.
c) Si determini l'insieme delle soluzioni nel caso in cui $\lambda = 1$

Esercizio 4. Nel piano euclideo bidimensionale si determini la distanza del punto di coordinate $(-4, 6)$ dalla retta di equazione $x - y = 2$

Esercizio 1. c) (Nota, i vettori sono scritti in riga invece che in colonna) Poiché $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ è una base di $\mathbf{R}^3$, per il Teorema di estensione per linearità, esiste un'unica applicazione lineare ϕ tale che

$$\phi(1,0,0)=(1,1,0),\quad \phi(0,1,0)=(0,0,1),\quad \text{e } \phi(0,0,1)=(1,1,1)$$

D'altra parte, poiché

$$(1,2,3)=(1,0,0)+2(0,1,0)+3(0,0,1),$$

otteniamo

$$\begin{aligned}(4,4,t) &= \phi(1,2,3)=\phi(1,0,0)+2\phi(0,1,0)+3\phi(0,0,1)\\ &= (1,1,0)+2(0,0,1)+3(1,1,1)=(4,4,5),\end{aligned}$$

da cui segue che, ϕ esiste se e solo se $t=5$.

Esercizio 2.
Se $U=W$, allora

$$U=U\cap W=W$$

e quindi

$$dim(U\cap W)=dim(U)=3.$$

Se $U\neq W$, allora, poiché entrambi gli spazi hanno la medesima dimensione, $U\not\subseteq W$, quindi $U+W$ è un sottospazio che contiene propriamente U e dunque ha dimensione almeno 4. D'altra parte U e W (e quindi $U+W$) sono sottospazi di V che ha dimensione 4. Ne segue che

$$4\leq dim(U+W)\leq dim(V)=4$$

e quindi $dim(U+W)=4$. Per il Teorema di Grassmann, segue che

$$dim(U\cap W)=dim(U)+dim(W)-dim(U+W)=3+3-4=2.$$

Esercizio 3. a) La matrice dei coefficienti del sistema è

$$\begin{pmatrix}\lambda & 2 & -2\\ -16 & -4 & \lambda\\ 8 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Calcolo i valori di λ per cui il determinante di questa matrice si annulla:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}\lambda & 2 & -2\\ -16 & -4 & \lambda\\ 8 & 1 & 1\end{vmatrix} &= \lambda\begin{vmatrix}-4 & \lambda\\ 1 & 1\end{vmatrix}+16\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}+8\begin{vmatrix}2 & -2\\ -4 & -\lambda\end{vmatrix}=\\ &= \lambda(-4-\lambda)+16(2+2)+8(2\lambda-8)=\\ &= -\lambda^2+12\lambda,\end{aligned}$$

che si annulla per

$$\lambda=0 \text{ o per } \lambda=12.$$

Ne segue che, per ogni valore di λ diverso da 0 e da 12, la matrice dei coefficienti ha rango 3 e, per il Teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha un'unica soluzione.

b) Se $\lambda = 0$ il sistema diviene

$$* = \begin{cases} 2y - 2z & = & 0 \\ -16x - 4y & = & -4 \\ 8x + y + z & = & 2 \end{cases}$$

In tal caso la colonna dei termini noti $(0, -4, 2)$ appartiene allo spazio generato dalle colonne della matrice dei coefficienti (è il doppio della prima colonna della matrice dei coefficienti), quindi il sistema ammette soluzioni. Si osservi che la matrice dei coefficienti ha rango 2 perché il minore di ordine 2

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante -4 che diverso da 0, quindi la matrice dei coefficienti ha rango 2 e lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} 2y - 2z & = & 0 \\ -16x - 4y & = & 0 \\ 8x + y + z & = & 0 \end{cases}$$

ha dimensione $3 - 2 = 1$ ed è generato dal vettore $(1, -4, -4)$.

Risolvendo per sostituzione il sistema $*$ si trova che una soluzione è data dal vettore $(1, -3, -3)$. Ne segue che l'insieme delle soluzioni del sistema $*$ è l'insieme

$$\{(1, -3, -3) + t(1, -4, -4) | t \in \mathbf{R}\}.$$

b) Se $\lambda = 1$ il sistema diviene

$$** = \begin{cases} x + 2y - 2z & = & 1 \\ -16x - 4y + z & = & -4 \\ 8x + y + z & = & 2 \end{cases}$$

Per il punto a) la matrice dei coefficienti ha rango 3, quindi le colonne formano una base per $\mathbf{R}^3$ e dunque il sistema ha un'unica soluzione. Con operazioni sulle righe della matrice completa del sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -16 & -4 & 1 & -4 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cerchiamo di ridurre il sistema in forma triangolare:

sostituendo la seconda riga con la somma della seconda con due volte la terza riga otteniamo la matrice equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sostituendo la prima riga con la somma della prima riga con la seconda riga otteniamo la matrice equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

sostituendo la terza riga con la differenza della terza riga meno otto volte la prima riga otteniamo la matrice equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

infine sostituendo la seconda riga con la somma della seconda riga pi due volte la terza otteniamo la matrice equivalente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -12 \\ 0 & 1 & -7 & -6 \end{pmatrix}$$

Ne segue che le soluzioni del sistema $**$ sono le stesse del sistema

$$= \begin{cases} x + z & = & 1 \\ -11z & = & -12 \\ y - 7z & = & -6 \end{cases}$$

dalla seconda equazione otteniamo

$$z = \frac{12}{11},$$

che, sostituito alla terza equazione implica

$$y = 7 \cdot \frac{12}{11} - 6 = \frac{18}{11}$$

e sostituiti alla prima implica

$$x = 1 - \frac{12}{11} = -\frac{1}{11}$$

La soluzione del sistema quindi il vettore

$$\begin{pmatrix} -1/11 \\ 18/11 \\ 12/11 \end{pmatrix}$$

Esercizio 4. Sia r la retta di equazione

$$x - y = 2.$$

Per determinare la distanza del punto P, di coordinate $(-4, 6)$, da r cerco
1) l'equazione di una retta s passante per P ed ortogonale a r,
2) calcolo le coordinate del punto Q di intersezione tra r ed s,
3) calcolo la distanza tra P e Q.

Determino l'equazione di una retta s ortogonale a r e passante per il punto P. Affinché s sia ortogonale a r, la sua equazione dev'essere del tipo

$$x + y = t$$

con $t \in \mathbf{R}$. Imponendo la condizione che $P \in s$, ottengo

$$-4 + 6 = t \text{ cioè } t = 2,$$

Dunque l'equazione di s è

$$x + y = 2$$

Calcolo il punto d'intersezione Q tra r e s risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x - y & = & 2 \\ x + y & = & 2 \end{cases}$$

che ammette come unica soluzione il punto Q di coordinate $(2, 0)$. Calcolo infine la distanza tra P e Q:

$$d(P, Q) = \sqrt{(-4 - 2)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$