Nome:
Cognome:
Numero di matricola:

Esame di Matematica per Architettura
28 gennaio 2016

	Es. 1			Es. 2	Es. 3	
	1.a	1.b	1.c		3.a	3.b
Punti						
su max.	2	2	8	7	7	7

Esercizio 1. a) Si dia la definizione di applicazione lineare.
b) Si dia la definizione di dimensione di uno spazio vettoriale.
c) Si dimostri il Teorema Nullità+Rango.

Esercizio 2. Calcolare l'inversa della seguente matrice.

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3. a) Data la conica $\mathcal{C}_1$ di equazione:

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

determinare una rotazione del piano euclideo in modo che rispetto al nuovo sistema di riferimento l'equazione di $\mathcal{C}_1$ sia in forma canonica e scrivere l'equazione di $\mathcal{C}$ in forma canonica nel nuovo sistema di riferimento.
b) Data la conica $\mathcal{C}_2$ di equazione:

$$x^2 - y^2 + 2x = 4,$$

determinare una traslazione del piano euclideo in modo che rispetto al nuovo sistema di riferimento l'equazione di $\mathcal{C}$ sia in forma canonica e scrivere l'equazione di $\mathcal{C}_2$ in forma canonica nel nuovo sistema di riferimento.

Es. 1) Vedere teoria

Es. 2. Per prima cosa calcolo la matrice dei complementi algebrici con i segni aggiustati:

$$A := \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & & \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ & & \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poi traspongo, divido per il determinante di A (che 6) e ottengo:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/6 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Nota: Per calcolare rapidamente il determinante di A si osservi che A diagonale a blocchi ed i due blocchi sono triangolari, quindi il determinante è il prodotto dei termini diagonali (in questo caso 6)

Es. 3) a) La matrice associata alla conica è:

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Per eliminare il termine in xy calcolo gli autovalori e gli autovettori della matrice

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico della matrice D è:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1/4 = \lambda^2 - 2\lambda + 3/4.$$

che si annulla per $\lambda \in \{1/2, 3/2\}$. Gli autovettori relativi a $1/2$ sono i vettori di coordinate a e b tali che

$$\begin{pmatrix} 1-1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1-1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè a e b soddisfano il sistema

$$\begin{cases} 1/2a + 1/2b = 0 \\ 1/2a + 1/2b = 0 \end{cases}$$

Da cui ottengo $a = -b$ e quindi l'autospazio $V_{1/2}$ relativo all'autovalore $1/2$ è generato dal vettore

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare un versore che genera $V_{1/2}$ basta dividere v per la sua lunghezza che è $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, ottenendo il versore

$$v/\sqrt{2}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente, gli autovettori relativi a $3/2$ sono i vettori di coordinate a e b tali che

$$\begin{pmatrix} 1-1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1-1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

cioè a e b soddisfano il sistema

$$\begin{cases} -1/2a & + & 1/2b & = & 0 \\ 1/2a & - & 1/2b & = & 0 \end{cases}$$

Da cui ottengo $a=b$ e quindi l'autospazio $V_{3/2}$ relativo all'autovalore $3/2$ è generato dal vettore

$$w:=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare un versore che genera $V_{1/2}$ basta dividere w per la sua lunghezza che è $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$, ottenendo il versore

$$w/\sqrt{2}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La rotazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

cercata è quindi quella la cui matrice associata è

$$(v/\sqrt{2},w/\sqrt{2})^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Eseguendo la sostituzione

$$x:=\frac{X}{\sqrt{2}}-\frac{Y}{\sqrt{2}} \text{ e } y:=\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}},$$

otteniamo che l'equazione di $\mathcal{C}_1$ nelle coordinate X e Y diviene:

$$(\frac{X}{\sqrt{2}}-\frac{Y}{\sqrt{2}})^2+(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}})^2+(\frac{X}{\sqrt{2}}-\frac{Y}{\sqrt{2}})(\frac{X}{\sqrt{2}}+\frac{Y}{\sqrt{2}})=4$$

cioè

$$\frac{3X^2}{2}+\frac{Y^2}{2}=4$$

che è l'equazione di un'ellisse.

b) Cerco un vettore

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

in modo che, eseguendo la sostituzione

$$x = X + a \text{ e } y = Y + b,$$

l'equazione di $\mathcal{C}_2$ nelle coordinate X e Y sia priva di termine noto. Osserviamo che, nelle coordinate X e Y, l'equazione di $\mathcal{C}_2$ diviene:

$$(X + a)^2 - (Y + b)^2 + 2(X + a) = 4$$

cioè

$$X^2 - Y^2 + 2(a + 1)X - 2bY + a^2 - b^2 + 2a - 4 = 0. \tag{1}$$

I termini di grado 1 di questa equazione si annullano se e solo se a e b soddisfano il sistema lineare:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & 1 & = & 0 \\ & & b & = & 0 \end{array} \right. ,$$

cioè $a = -1$ e $b = 0$. Sostituendo a e b con questi valori nell'equazione 1, otteniamo:

$$X^2 - Y^2 = 5, \tag{2}$$

che è l'equazione di un'iperbole. La traslazione cercata è

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a \\ y \end{pmatrix}.$$