

Cognome
Anno imm.

Nome
Matricola

Secondo compito di Algebra Lineare a Ingegneria Civile
16 settembre 2024

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna, negli spazi previsti, scrivendo chiaramente in buon italiano. “Scrivere” significa dare solamente il risultato finale, mentre “calcolare”, “risolvere”, “determinare” significa fornire anche il procedimento, almeno in forma schematica. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta. Per ogni domanda è indicato il punteggio massimo ottenibile.

Potete usare una calcolatrice non troppo sofisticata, **non** il cellulare; niente libri, appunti o altro. Tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Esercizio 0.1. Siano U, V spazi vettoriali su \mathbb{R} .

(a) Dire cosa significa la frase “ f è un’applicazione lineare da U a V ”. 2pt

(b) Sia g una seconda applicazione lineare, da V a W . Dire quale delle due composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$ è ben definita, e dimostrare che si tratta di un’applicazione lineare. 4pt

Esercizio 0.2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3, sia $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineare simmetrica su V , e sia $A = \{v_1, v_2\}$ un insieme composto da esattamente due vettori, entrambi non nulli.

(a) Dire cosa significa la frase “ f è nondegenere”. 2pt

(b) Dare la definizione dell’ortogonale A^\perp di A rispetto a f . 2pt

(c) Dimostrare che $A^{\perp\perp} \supseteq \text{span}(A)$. 4pt

- (d) Dare un esempio di f per cui in (c) si ha uguaglianza, e un esempio in cui si ha contenimento proprio. 4pt

Esercizio 0.3. Sia f l'applicazione lineare di \mathbb{C}^3 , con base canonica e_1, e_2, e_3 , definita da $f(e_i) = e_{i+1}$ e $f(e_3) = e_1$. Calcolare la matrice associata e il polinomio caratteristico di f , e gli autovalori e autovettori. 6pt

Esercizio 0.4. Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $f(e_1) = e_1 + 3ae_2 + 3e_3$, $f(e_2) = e_2$, $f(e_3) = -ae_2$, dove a è l'ultima cifra del vostro numero di matricola.

- Calcolare una base per $\ker f$. 3pt

- Dimostrare che $f \circ f = f$. 3pt