Cognome | Nome
Anno imm. | Matricola

Secondo compito di Algebra Lineare a Ingegneria Civile
15 luglio 2024

Svolgete gli esercizi direttamente sul testo a penna, negli spazi previsti, scrivendo chiaramente in buon italiano. “Scrivere” significa dare solamente il risultato finale, mentre “calcolare”, “risolvere”, “determinare” significa fornire anche il procedimento, almeno in forma schematica. Dovete consegnare solo il foglio del testo: nessun foglio di brutta. Per ogni domanda è indicato il punteggio massimo ottenibile.

Potete usare una calcolatrice non troppo sofisticata, **non** il cellulare; niente libri, appunti o altro. Tenete il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore. I parametri a e b da usare negli esercizi sono la penultima e l’ultima cifra del numero di matricola: scriveteli qua sotto.

$$a = \ldots\ldots, \qquad b = \ldots\ldots$$

Esercizio 1. (a) Dare la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale. 2pt

(b) Siano 6pt

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare che (v_1, v_2, v_3) è una base di $\mathbb{R}^3$, e scrivere $12632v_3 + w$ come combinazione lineare di v_1, v_2, v_3.

(c) Determinare quante applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ esistono per cui 5pt

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

e quante di esse sono iniettive. Calcolare una base per $\ker f$.

Esercizio 2.

(a) Dare le definizioni di kernel e di immagine di un’applicazione lineare. 3pt

(b) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare che manda (x, y) in $(x + y, 2x - 3y)$. Scrivere la matrice associata a f rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^2$, e calcolare autovalori e autovettori di f. 5pt

Esercizio 3. Risolvere il sistema 3pt

$$\begin{cases} x + 2ay + z = 0 \\ -2x + bz = a \\ -x + by = a \end{cases}$$

Esercizio 4. Sia f l'applicazione lineare di $\mathbb{R}^4$, con base canonica e_1, e_2, e_3, e_4, definita da $f(e_i) = e_{i+1}$ e $f(e_4) = e_1$. Calcolare la matrice associata e il polinomio caratteristico di f, e gli eventuali autovalori e autovettori. Sostituendo $\mathbb{R}^4$ con $\mathbb{C}^4$, cosa cambia nella risposta? 6pt