Nome, cognome

Numero di matricola:

	Es. 1			Es. 2	Es. 3			Es. 4
	1.a	1.b	1.c		3.a	3.b	3.c	
Punti								
su max.	2	4	4	8	2	4	3	3

17 giugno 2024
I Appello di Algebra Lineare

Esercizio 1. a) Siano $v_1, \dots, v_n$ vettori di uno spazio vettoriale V. Si dica cosa vuol dire che $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente dipendenti.
b) Si considerino i seguenti quattro vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad w := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si provi che sono linearmente dipendenti e si scriva il vettore w come combinazione lineare di v_1, v_2 e v_3.
c) Siano v_1, v_2, v_3 e w come nel punto precedente e sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare tale che

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f(v_3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Si determinino una base di $\ker(f)$ ed una base di $f(\mathbb{R}^3)$.

Esercizio 2. (Teorema Nullitá+Rango) Si provi che se $f\colon V \to W$ è un'applicazione lineare tra due spazi vettoriali V e W di dimensione finita, allora

$$\dim(V) = \dim(\ker(f)) + \dim(f(V)).$$

Esercizio 3. a) Si diano le definizioni di *autovalore* ed *autovettore* di un'applicazione lineare.
b) Sia (v_1, v_2, v_3) una base di uno spazio vettoriale V e sia consideri l'applicazione lineare

$$\begin{array}{cccc} f\colon & V & \to & V \\ & v_1 & \mapsto & v_2 + v_3 \\ & v_2 & \mapsto & v_2 + 3v_3 \\ & v_3 & \mapsto & 3v_2 + 9v_3 \end{array}$$

Si scriva la matrice associata a f rispetto alla base (v_1, v_2, v_3) di V e se ne determinino gli autovalori.
c) Sia f come nel punto b), si dica (giustificando la risposta) se esiste una base di V formata da autovettori per f.

Esercizio 4. Siano v_1 e v_2 come nell'Esercizio 1. Si determini la dimensione dell'ortogonale dello spazio $span(v_1, v_2)$ nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare usuale.