SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SU RELAZIONI D'EQUIVALENZA

(1) Per ogni relazione binaria E su $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ descritta nel seguito, stabilire se E è una relazione d'equivalenza. In caso negativo, indica quali proprietà non sono verificate e perché non sono verificate. In caso positivo, disegna la relazione su A usando una freccia da x a y per ogni coppia $(x, y) \in E$ e indica per ogni elemento di A quale sia la sua classe d'equivalenza.
a) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$; **SI ed ha un'unica classe d'equivalenza**.
b) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4))\}$; **NO: non è simmetrica perché** $(0, 1) \in E$ **ma** $(1, 0) \notin E$**.**
c) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)(2, 1)(2, 2), (3, 3), (4, 4))\}$; **NO: non è transitiva perché** $(0, 1)$ **e** $(1, 2)$ **sono in** E **ma** $(0, 2) \notin E$**.**
d) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)(2, 1)(2, 2), (0, 2), (2, 0), (3, 3), (4, 4))\}$; **SI, ed ha** 3 **classi d'equivalenza: la classe** $\{0, 1, 2\}$**, la classe** $\{3\}$ **e la classe** $\{4\}$**.**
e) $E = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)(3, 4), (4, 3)\}$. **SI, ed ha** 3 **classi d'equivalenza: la classe** $\{0, 1\}$**, la classe** $\{2\}$ **e la classe** $\{3, 4\}$**.**

(2) Per ogni relazione binaria R su $\mathbb{N}$ descritta nel seguito, stabilire se R è una relazione riflessiva, simmetrica o transitiva. In caso negativo, indica quali proprietà non sono verificate e perché non sono verificate.
a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ x$ e y sono entrambi pari$\}$; **non è riflessiva perché se** x **è dispari non vale** $(x, x) \in R$**; è simmetrica (se** x **e** y **sono pari, anche** y **e** x **lo sono); è transitiva perché se** x **e** y **sono pari e** y**,** z **sono pari, allora anche** x **e** z **sono pari.**
b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \geq y\}$; **non è simmetrica;**
c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ x$ è un multiplo o un divisore di $y\}$; **non è transitiva:** $(2, 6) \in R$**,** $(6, 3) \in R$ **ma** $(2, 3) \notin R$**.**

(3) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da:

$$aRb \ \Leftrightarrow a + b \text{ è pari.}$$

Dimostrare che R è d'equivalenza su $\mathbb{Z}$ e determinare la classe d'equivalenza di 0 e di 1. Quante classi ha la relazione R? Trova un insieme di rappresentanti X per le classi d'equivalenza.

Soluzione

La relazione è riflessiva: per ogni $a \in \mathbb{Z}$ si ha aRa perché $a + a = 2a$ è pari;
la reazione è simmetrica: se aRb, allora $a + b$ è pari, quindi anche

$b + a$ è pari e bRa;
la relazione è transitiva: se aRb e bRc allora abbiamo due casi possibili: a, b sono entrambi pari oppure a, b sono entrambi dispari. Nel primo caso, da $b + c$ pari segue che c è pari, e quindi (siccome a è pari) ne segue $a + c$ pari e quindi aRc; nel secondo caso da $b + c$ pari segue che c è dispari, e quindi (siccome a è dispari) ne segue $a + c$ pari e quindi aRc; quindi concludiamo che aRc vale in ogni caso.
Le classi d'equivalenza di 0 e di 1 sono:

$$0_{|R} = \{b \in \mathbb{Z} : 0Rb\} = \{b \in \mathbb{Z} : 0 + b \text{ è pari}\} = \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ è pari}\}.$$
$$1_{|R} = \{b \in \mathbb{Z} : 1Rb\} = \{b \in \mathbb{Z} : 1 + b \text{ è pari}\} = \{b \in \mathbb{Z} : b \text{ è dipari}\}.$$

La relazione R ha due classi d'equivalenza.

(4) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da:
$$aRb \ \Leftrightarrow a + b \text{ è dispari.}$$
La relazione R è d'equivalenza?
Soluzione
La relazione R non è d'equivalenza perché non è riflessiva ($(1, 1) \notin R$).

(5) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da:
$$aRb \ \Leftrightarrow a \cdot b \text{ è dispari.}$$
Soluzione
La relazione R non è d'equivalenza perché non è riflessiva ($(2, 2) \notin R$).

(6) Sia R la relazione su $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ definita da
$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$
Dimostra che R è d'equivalenza. Qual è la classe d'equivalenza di $(1, 1)$?
Qual è la classe d'equivalenza di $(1, 2)$?
Quante classi ha la relazione R?
Soluzione
Per dimostrare che R è d'equivalenza è sufficiente notare che
$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$
Quindi ogni coppia (a, b) è in relazione con le coppie (c, d) che hanno lo stesso quoziente. Utilizzando questa proprietà si vede subito che R è riflessiva, simmetrica e transitiva.
Inoltre:

$$(1, 1)_{|R} = \{(c, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : (1, 1)R(c, d)\} = \{(c, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \frac{1}{1} = \frac{c}{d}\} =$$
$$= \{(c, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : 1 = \frac{c}{d}\} = \{(c, d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : c = d\} = \{(c, c) : c \in \mathbb{N}^*\}$$

$$(1,2)_{|R} = \{(c,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : (1,2)R(c,d)\} = \{(c,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : \frac{1}{2} = \frac{c}{d}\} =$$

$$= \{(c,d) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* : d = 2c\} = \{(c,2c) : c \in \mathbb{N}^*\}.$$

La relazione R ha infinite classi d'equivalenza: per accorgersene, basta notare che, al variare di $n \in \mathbb{N}^*$ gli elementi $(1,n)$ sono tutti in classi distinte (perché danno luogo a quozienti distinti).

(7) Sia R la relazione binaria su $\mathbb{Z}$ definita da

$$xRy \Leftrightarrow xy \geq 0.$$

Determinare se R è riflessiva, simmetrica, transitiva. In caso negativo, spiegare perché la proprietà non è verificata.

Soluzione parziale

La relazione non è transitiva: si ha $1R0$ e $0R-1$, ma la coppia $(1,-1) \notin R$.

(8) Sia E la relazione sui numeri naturali $\mathbb{Z}$ definita da:

$$xEy \Leftrightarrow x^2 = y^2$$

Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza. Trovare la classe d'equivalenza del numero 0 e del numero 2.

Soluzione parziale

La classe d'equivalenza di 0 è:

$$0_{|E} = \{y \in \mathbb{Z} : 0Ey\} = \{y \in \mathbb{Z} : 0^2 = y^2\} = \{y \in \mathbb{Z} : y^2 = 0\} = \{y \in \mathbb{Z} : y = 0\} = \{0\}.$$

$$2_{|E} = \{y \in \mathbb{Z} : 2Ey\} = \{y \in \mathbb{Z} : 2^2 = y^2\} = \{y \in \mathbb{Z} : y^2 = 4\} = \{2,-2\}.$$

(9) Dimostrare che la relazione su $\mathbb{R}$, definita da $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ è una relazione d'equivalenza. Trovare infiniti numeri irrazionali che sono nella stessa classe di $\sqrt{2}$.

Soluzione

La relazione è riflessiva (per ogni $x \in \mathbb{Z}$, $x^2 - x^2 = 0 \in \mathbb{Z}$) e simmetrica (se xRy allora $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$, quindi $-(x^2-y^2) = y^2 - x^2 \in \mathbb{Z}$ e vale anche yRx).

La relazione è anche transitiva: se xRy e yRz allora $x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ e $y^2 - z^2 \in \mathbb{Z}$. sommando questi due numeri interi, si ottiene un altro numero intero: $x^2 - y^2 + y^2 - z^2 = x^2 - z^2 \in \mathbb{Z}$ e quindi xRz.

Si ha:

$$\sqrt{2}_{|R} = \{y \in \mathbb{R} : \sqrt{2}Ry\} = \{y \in \mathbb{R} : 2 - y^2 \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{R} : y^2 \in \mathbb{Z}\}$$

e tutti i numeri del tipo $\sqrt{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ sono in $\sqrt{2}_{|R}$. Tra questi, vi sono infiniti numeri irrazionali (tutti quelli per cui n non è un quadrato).

(10) Sia E la relazione su $\mathbb{R}$ definita da

$$xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$

Dimostrare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe d'equivalenza dell'elemento 1 e la classe d'equivalenza di $0,5$.

Soluzione parziale (la dimostrazione che E è d'equivalenza è simile alla dimostrazione data nell'esercizio precedente)

$$1_{|R} = \{y \in \mathbb{R} : 1Ry\} = \{y \in \mathbb{R} : 1 - y \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{R} : y \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}.$$

$$0,5_{|R} = \{y \in \mathbb{R} : 0,5Ry\} = \{y \in \mathbb{R} : 0,5 - y \in \mathbb{Z}\} = \{y \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} y = 0,5 + k\} =$$
$$\{y \in \mathbb{R} : \text{ la parte decimale di } y \text{ è } 0,5\}.$$

(11) Sia E la relazione binaria su $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da:

$$(x, y)\ E\ (x', y') \quad \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$

Dimostare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe di equivalenza dell'elemento $(1, 0)$ di A.
Quante sono le classi d'equivalenza di E su A e come sono fatte?
Determina un insieme di rappresentanti per tali classi.

Soluzione parziale

$$(1, 0)_{|E} = \{(x', y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : (1, 0)E(x', y')\} = \{(x', y') \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 1+0 = x'+y'\} =$$
$$\{(x', y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x' + y' = 1\}$$

.

La classe di $(1, 0)$ è quindi data da tutti i punti (x', y') che stanno sulla retta di equazione $x + y = 1$.

Più in generale, la classe di un generico elemento (a, b) è data da tutti i punti della retta di equazione $x + y = a + b$.

Un insieme di rappresentanti per le classi è dato ad esempio dall'asse delle ascisse (questa retta infatti interseca ogni classe in uno ed un solo punto).

(12) Sia E la relazione binaria su $A = Pow(\mathbb{N})$ definita da:

$$X\ E\ Y \quad \Leftrightarrow\ X \text{ e } Y \text{ sono finiti e hanno lo stesso numero di elementi}$$
$$\text{oppure } X, Y \text{ sono entrambi infiniti}$$

Dimostare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe di equivalenza dell'elemento $\emptyset$ di A.
Dato un numero naturale n determinare la classe di equivalenza di $\{n\}$ in A
Determinare la classe di equivalenza dell'insieme dei numeri pari.
Quante sono le classi d'equivalenza di E su A?

Soluzione

La relazione è riflessiva (ogni insieme X, se finito, ha lo stesso numero di elementi di sé stesso, mentre se è infinito X e X sono entrambi infiniti).

La relazione è simmetrica : se XEY e X, Y sono finiti, allora hanno lo stesso numero di elementi, quindi anche Y e X hanno lo steso numero di elementi, e quindi Y e X hanno lo stesso numero di elementi e vale YEX; se invece X, Y sono entrambi infiniti, allora anche Y, X lo sono e YEX.

La relazione è transitiva: XEY e YEZ abbiamo due casi possibili: X, Y sono finiti oppure X, Y sono infiniti. Nel primo caso, X, Y hanno lo stesso numero di elementi e da YEZ segue che anche Z è finito ed ha lo stesso numero di elementi di Y e quindi anche di X. Quindi XEY. Nel secondo caso, da YEZ segue che anche Z è infinito e quindi XEZ.

$$\emptyset_{|E} = \{Y \in Pow(\mathbb{N}) : \emptyset EY\} = \{Y \in Pow(\mathbb{N}) : Y \text{ ha lo stesso numero di elementi di } \emptyset\} =$$
$$\{Y \in Pow(\mathbb{N}) : Y = \emptyset\} = \{\emptyset\}.$$
$$\{n\}_{|E} = \{Y \in Pow(\mathbb{N}) : \{n\}EY\} = \{Y \in Pow(\mathbb{N}) : Y \text{ ha lo stesso numero di elementi di } \{n\}\} =$$
$$\{Y \in Pow(\mathbb{N}) : Y \text{ ha un elemento}\} = \{\{m\} : m \in \mathbb{N}\}.$$

Indichiamo con $2\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri pari:

$$2\mathbb{N}_{|E} = \{Y \in Pow(\mathbb{N}) : 2\mathbb{N}EY\} = \{Y \in Pow(\mathbb{N}) : Y \text{ è un insieme infinito}\}.$$

La relazione E ha infinte classi d'equivalenza.

(13) Sia $A = \{f : f \text{ è una funzione da } \mathbb{N} \text{ in } \mathbb{N}\}$ e R la relazione d'equivalenza su A definita da

$$fRg \leftrightarrow f(0) = g(0).$$

Determinare la classe d'equivalenza della funzione $id_{\mathbb{N}}$ e quella della funzione definita da $f(n) = n + 1$.

Soluzione Ricordando che $id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita da $id_{\mathbb{N}}(n) = n$, si ha:

$$id_{\mathbb{N}|R} = \{g \in A : id_{\mathbb{N}}Rg\} = \{g \in A : id_{\mathbb{N}}(0) = g(0)\} = \{g \in A : g(0) = 0\}.$$

Se invece $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è definita da $f(n) = n + 1$, si ha

$$f_{|R} = \{g \in A : fRg\} = \{g \in A : f(0) = g(0)\} = \{g \in A : g(0) = 1\}.$$

(14) Sia $A = \{f : f \text{ è una funzione da } \mathbb{N} \text{ in } \mathbb{N}\}$ e R la relazione su A definita da

$$fRg \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq k \to f(n) = g(n)).$$

Sia f la funzione definita da $f(n) = n + 1$. È vero che $id_{\mathbb{N}}Rf$?
Trova una funzione g diversa da $id_{\mathbb{N}}$ tale che $id_{\mathbb{N}}Rg$.
Prova che R è una relazione d'equivalenza e determina la classe d'equivalenza di $id_{\mathbb{N}}$.

Soluzione Dimostriamo che $(id_{\mathbb{N}}, f) \notin R$. Infatti, per ogni $n \in \mathbb{N}$ non succede mai che $id_{\mathbb{N}}(n) = n$ è uguale a $f(n) = n + 1$.

Se invece consideriamo la funzione g definita da $g(0) = 1$ e $g(n) = n$, per ogni $n \neq 0$, abbiamo che $g \neq id_{\mathbb{N}}$ e $id_{\mathbb{N}} R g$.

Proviamo che R è d'equivalenza, notando che fRg se e solo se le due funzioni coincidono da un certo numero naturale in poi.

R è riflessiva: infatti f coincide con f ovunque.
R è simmetrica: infatti se f coincide con g da k in poi, anche g coincide con f da k in poi.
R è transitiva: se f e g coincidono da k in poi e g, h coincidono da k' in poi, allora se $k \geq k'$ f, h coincideranno da k in poi, mentre se $k' \geq k$ le funzioni f, h coincideranno da k' in poi.

$$id_{\mathbb{N}|R} = \{g \in A : id_{\mathbb{N}} R g\} = \{g \in A : id_{\mathbb{N}}, g \text{coincidono da un certo } k \text{ in poi}\} =$$
$$\{g \in A : \exists k \in \mathbb{Z} \forall n \geq k \; g(n) = n\}.$$

(15) Sia $A = \mathbb{N}^*$ e E la relazione d'equivalenza su A definita da:

$$nEm \Leftrightarrow [\text{ per ogni numero primo } p \text{ si ha: } p|n \Leftrightarrow p|m \;]$$

Trova le classi d'equivalenza per ognuno degli elementi $2, 3, 6, 1$.
Trova un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A.

Soluzione.

$$2_{|E} = \{m \in \mathbb{N}^* : 2Em\} = \{m \in \mathbb{N}^* : \; m \text{ ha gli stessi divisori primi di } \; 2\} = \{2^k : k \in \mathbb{N}^*\}.$$
$$3_{|E} = \{m \in \mathbb{N}^* : 3Em\} = \{m \in \mathbb{N}^* : \; m \text{ ha gli stessi divisori primi di } \; 3\} = \{3^k : k \in \mathbb{N}^*\}.$$
$$6_{|E} = \{m \in \mathbb{N}^* : 6Em\} = \{m \in \mathbb{N}^* : \; m \text{ ha gli stessi divisori primi di } \; 6\} = \{2^k 3^h : k, h \in \mathbb{N}^*\}.$$
$$1_{|E} = \{m \in \mathbb{N}^* : 1Em\} = \{m \in \mathbb{N}^* : \; m \text{ ha gli stessi divisori primi di } \; 1\} = \{1\}.$$

Un insieme di rappresentanti è dato dal numero 1 più tutti i numeri che sono prodotto di numeri primi distinti.