ESERCIZI SU RELAZIONI D'EQUIVALENZA

(1) Per ogni relazione binaria E su $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ descritta nel seguito, stabilire se E è una relazione d'equivalenza. In caso negativo, indica quali proprietà non sono verificate e perché non sono verificate. In caso positivo, disegna la relazione su A usando una freccia da x a y per ogni coppia $(x, y) \in E$ e indica per ogni elemento di A quale sia la sua classe d'equivalenza.
a) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$;
b) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4))\}$;
c) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)(2, 1)(2, 2), (3, 3), (4, 4))\}$;
d) $E = \{(0, 0)(0, 1), (1, 0), (1, 1), (1, 2)(2, 1)(2, 2), (0, 2), (2, 0), (3, 3), (4, 4))\}$;
e) $E = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)(3, 4), (4, 3)\}$.

(2) Per ogni relazione binaria R su $\mathbb{N}$ descritta nel seguito, stabilire se R è una relazione riflessiva, simmetrica o transitiva. In caso negativo, indica quali proprietà non sono verificate e perché non sono verificate.
a) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ x \text{ e } y \text{ sono entrambi pari}\}$;
b) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x \geq y\}$;
c) $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} :\ x \text{ è un multiplo o un divisore di } y\}$.

(3) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da:

$$aRb \ \Leftrightarrow a + b \text{ è pari.}$$

Dimostrare che E è d'equivalenza su $\mathbb{Z}$ e determinare la classe d'equivalenza di 0 e di 1. Quante classi ha la relazione E? Trova un insieme di rappresentanti X per le classi d'equivalenza.

(4) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da:

$$aRb \ \Leftrightarrow a + b \text{ è dispari.}$$

La relazione R è d'equivalenza?

(5) Sia R la relazione su $\mathbb{Z}$ definita da:

$$aRb \ \Leftrightarrow a \cdot b \text{ è dispari.}$$

La relazione R è d'equivalenza?

(6) Sia R la relazione su $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ definita da

$$(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow ad = bc.$$

Dimostra che R è d'equivalenza. Qual è la classe d'equivalenza di $(1, 1)$?
Qual è la classe d'equivalenza di $(1, 2)$?
Quante classi ha la relazione R?

(7) Sia R la relazione binaria su $\mathbb{Z}$ definita da
$$xRy \Leftrightarrow xy \geq 0.$$
Determinare se R è riflessiva, simmetrica, transitiva. In caso negativo, spiegare perché la proprietà non è verificata.

(8) Sia E la relazione sui numeri naturali $\mathbb{Z}$ definita da:
$$xEy \Leftrightarrow x^2 = y^2$$
Dimostrare che E è una relazione d'equivalenza. Trovare la classe d'equivalenza del numero 0 e del numero 2.

(9) Dimostrare che la relazione su $\mathbb{R}$, definita da $xRy \Leftrightarrow x^2 - y^2 \in \mathbb{Z}$ è una relazione d'equivalenza. Trovare infiniti numeri irrazionali che sono nella stessa classe di $\sqrt{2}$.

(10) Sia E la relazione su $\mathbb{R}$ definita da
$$xEy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$$
Dimostrare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe d'equivalenza dell'elemento 1 e la classe d'equivalenza di $0,5$.

(11) Sia E la relazione binaria su $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definita da:
$$(x, y)\ E\ (x', y') \quad \Leftrightarrow x + y = x' + y'$$
Dimostare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe di equivalenza dell'elemento $(1, 0)$ di A.
Quante sono le classi d'equivalenza di E su A e come sono fatte?
Determina un insieme di rappresentanti per tali classi.

(12) Sia E la relazione binaria su $A = Pow(\mathbb{N})$ definita da:
$X\ E\ Y \quad \Leftrightarrow$ X e Y sono finiti e hanno lo stesso numero di elementi
oppure X, Y sono entrambi infiniti
Dimostare che E è d'equivalenza.
Determinare la classe di equivalenza dell'elemento $\emptyset$ di A.
Dato un numero naturale n determinare la classe di equivalenza di $\{n\}$ in A
Determinare la classe di equivalenza dell'insieme dei numeri pari.
Quante sono le classi d'equivalenza di E su A?

(13) Sia $A = \{f : f$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}\}$ e R la relazione d'equivalenza su A definita da
$$fRg \leftrightarrow f(0) = g(0).$$
Determinare la classe d'equivalenza della funzione $id_{\mathbb{N}}$ e quella della funzione definita da $f(n) = n + 1$.

(14) Sia $A = \{f : \ f$ è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}\}$ e R la relazione su A definita da

$$fRg \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq k \rightarrow f(n) = g(n)).$$

Sia f la funzione definita da $f(n) = n + 1$. È vero che $id_{\mathbb{N}}Rf$?
Trova una funzione g diversa da $id_{\mathbb{N}}$ tale che $id_{\mathbb{N}}Rg$.
Prova che R è una relazione d'equivalenza e determina la classe d'equivalenza di $id_{\mathbb{N}}$.

(15) Sia $A = \mathbb{N}^*$ e E la relazione d'equivalenza su A definita da:

$$nEm \Leftrightarrow [\text{ per ogni numero primo } p \text{ si ha: } p|n \Leftrightarrow p|m\ ]$$

Trova le classi d'equivalenza per ognuno degli elementi $2, 3, 6, 1$.
Trova un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di E su A.