

## Esercizi su trasformazioni lineari e matrici

(1) Sia  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  una trasformazione lineare.

- (a) Sia  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la trasformazione lineare data da  $F(x, y) = (y, x)$ . Se  $v$  è un vettore che si trova sulla bisettrice del primo e terzo quadrante del Piano Cartesiano, quanto vale  $F(v)$ ? La trasformazione  $F$  è una rotazione oppure una simmetria? In quest'ultimo caso, rispetto a quale asse?
- (b) Determinare una trasformazione lineare  $F$  che mandi un qualsiasi vettore  $v \in \mathbb{R}^2$  nel vettore simmetrico rispetto all'asse  $x$ . Determinare una trasformazione lineare  $F$  che mandi un qualsiasi vettore  $v \in \mathbb{R}^2$  nel vettore simmetrico rispetto alla bisettrice fra il secondo e il quarto quadrante del Piano Cartesiano.
- (c) Sia  $A$  la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/\pi \end{pmatrix}$$

Sia  $L_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la trasformazione lineare che corrisponde ad  $A$ , cioè

$$L_A(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

- (i) Calcolare  $L_A(1, -1, 0, 1)$ .
- (ii) Quanto vale  $L_A$  sui vettori della base canonica?
- (iii) Esprimere il vettore  $L_A(1 - 2, 1, 0)$  come combinazione lineare delle colonne di  $A$ .
- (d) Stabilire quali fra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari; in caso positivo determinare la matrice corrispondente alla trasformazione (relativamente alle basi canoniche).
- (i)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(x, y) = (x + y, x, x - y)$ ;
- (ii)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $F(x, y, z) = (x + y + z, \sqrt{2}x + 1)$ ;
- (iii)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(x, y) = (x^2, x, x - y)$ ;
- (iv)  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  con  $F(x, y, z, w) = (w, y, x)$ .
- (e) Se i vettori  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente dipendenti in  $\mathbb{R}^n$ , allora i vettori  $F(v_1), \dots, F(v_k)$  sono linearmente dipendenti in  $\mathbb{R}^m$ . 

|   |   |
|---|---|
| V | F |
|---|---|
- (f) Se i vettori  $v_1, \dots, v_k$  sono linearmente indipendenti, allora i vettori  $F(v_1), \dots, F(v_k)$  sono linearmente indipendenti. 

|   |   |
|---|---|
| V | F |
|---|---|

- (g) Se i vettori  $v_1, \dots, v_k$  generano  $\mathbb{R}^n$ , allora i vettori  $F(v_1), \dots, F(v_k)$  generano  $\mathbb{R}^m$ . 

|          |          |
|----------|----------|
| <b>V</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|
- (h) Se  $(v_1, \dots, v_n)$  è una base di  $\mathbb{R}^n$  allora  $(F(v_1), \dots, F(v_n))$  è una base di  $\mathbb{R}^m$ . 

|          |          |
|----------|----------|
| <b>V</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|
- (i) Se  $F$  è iniettiva e  $(v_1, \dots, v_n)$  sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^n$ , allora i vettori  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  sono linearmente indipendenti in  $\mathbb{R}^m$ . 

|          |          |
|----------|----------|
| <b>V</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|
- (j) Se  $F$  è suriettiva e  $(v_1, \dots, v_n)$  generano  $\mathbb{R}^n$  allora i vettori  $F(v_1), \dots, F(v_n)$  generano  $\mathbb{R}^m$ . 

|          |          |
|----------|----------|
| <b>V</b> | <b>F</b> |
|----------|----------|

- (2) Determinare una matrice  $A_{2 \times 2}$  tale che, per ogni vettore  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  il vettore  $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sia uguale al vettore  $v$  ruotato di  $\frac{\pi}{6}$  in senso orario.

Determinare una matrice  $B_{2 \times 2}$  tale che, per ogni vettore  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  il vettore  $B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  sia uguale al vettore  $v$  ruotato di  $\frac{\pi}{6}$  in senso antiorario.

Determinare la matrice  $AB$ .

- (3) Sia  $\mathbb{P}^2$  l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale di 2:

$$\mathbb{P}^2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrare che  $\mathbb{P}^2$  è uno spazio vettoriale, con le operazioni definite da:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2.$$

Trovare inoltre una base di  $\mathbb{P}^2$ .

- (4) Se  $\mathbb{P}^2$  è uno spazio vettoriale è lo spazio vettoriale definito al punto precedente, sia  $F$  la funzione  $F : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da  $F(p) = (p(0), p(1))$  (ad esempio, se  $p = 1 + x + 2x^2$  allora  $F(p) = (1, 4)$ ).
- (a) Dimostrare che  $F$  è una trasformazione lineare.
- (b) Trovare un polinomio  $p$ , diverso dal polinomio nullo, tale che  $F(p)$  sia il vettore nullo di  $\mathbb{R}^2$ .
- (c)  $F$  è iniettiva?  $F$  è suriettiva?

- (5) Siano  $V, W$  spazi vettoriali vettoriali su  $\mathbb{R}$ ,  $B = (v_1, \dots, v_n)$  una base di  $V$  e  $T$  una trasformazione lineare  $T : V \rightarrow W$ .

- (a) dimostrare che l'immagine di  $T$ , cioè

$$Im(T) = \{T(v) : v \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di  $W$ .

- (b) Dimostrare che  $Im(T)$  è generato dai vettori  $T(v_1), \dots, T(v_n)$ , cioè

$$Im(T) = L(T(v_1), \dots, T(v_n)).$$

- (c) Trovare un esempio di trasformazione lineare in cui i vettori  $T(v_1), \dots, T(v_n)$  siano dipendenti.