PREMESSA: coordinate di un vettore v rispetto ad una base B Dato uno spazio vettoriale V di dimensione n ed una sua base $B = (v_1, \dots, v_n)$, le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base B sono l'unica n-pla $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$. Indichiamo con $||v||_B$ il vettore colonna di tali coordinate :

$$||v||_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

ESEMPIO Se $V = \mathbb{R}^2$ e $B = (v_1, v_2)$ con $v_1 = (1,1), v_2 = (0,2)$ allora il vettore $v = (2,0)$ si scrve come $v = 2v_1 - v_2$ e quindi

$$||v||_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Notare che qualsiasi sia la base $B = (v_1, \dots, v_n)$ si ha

$$||v_1||_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ||v_2||_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

etc. Infatti $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots 0 \cdot v_n$, $v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots 0 \cdot v_n$ e cosí via.

ESERCIZI

(1) Considera i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1,2,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (2,0,0).$$

 (a) Dimostra che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
 (b) Determina le coordinate dei seguenti vettori nella base B:

$$v = v_1 - v_2 + v_3, \quad w = (3,1,0), \quad z = (0,1,-1).$$

 (c) Determina il vettore v di $\mathbb{R}^3$ che ha coordinate $(2,-1,3)$ rispetto alla base B.
 (d) Considera la trasfomazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y,z) = (x+y, x-z)$. Trova la matrice $M^B_{\mathcal{E}_2}(F)$ della trasformazione F rispetto alla base B per il dominio e alla base canonica per il codominio.
 (e) Verifica che il prodotto

$$M^B_{\mathcal{E}_2}(F) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

 è uguale al trasposto del vettore $F(v_1 + v_2 + v_3)$. Giustifica l'uguaglianza.

Risposte:

$$||v||_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, ||w||_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, ||z||_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M^B_{\mathcal{E}_2}(F) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) (a) In $\mathbb{R}^3$ sono dati i vettori $u_1 = (1,1,2), u_2 = (2,-1,3), u_3 = (3,0,h)$; dire per quali valori di h i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti.
(**R:** $h \neq 5$)

(b) Per quali valori di h è possibile trovare una trasformazione lineare

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

tale che $F(u_1) = (1,0,0), F(u_2) = (0,1,0), F(u_3) = (0,0,1)$? Per questi valori di h determina la matrice $M^B_{\mathcal{E}_3}(F)$.

(3) In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $u_1 = (1,-1,0,1), u_2 = (2,1,1,0), u_3 = (3,0,1,1), u_4 = (0,1,-1,0)$. Verificare che i vettori u_1, u_2, u_4 sono linearmente indipendenti, e che u_3 è una loro combinazione lineare. Trovare le coordinate (a,b,c) di u_3 rispetto alla base u_1, u_2, u_4 del sottospazio vettoriale $L(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1,-1,2t-8,t+1)$ appartiene allo spazio $L(u_1, u_2, u_4)$
(suggerimento: $v \in L(u_1, u_2, u_4)$ se e solo i sottospazi $L(u_1, u_2, u_4)$ e $L(u_1, u_2, u_4, v)$ hanno la stessa dimensione (perché?)) Per i valori di t trovati, determinare le coordinate (λ, μ, ν) di v rispetto ai vettori u_1, u_2, u_4.
(**R:** $(a,b,c) = (1,1,0)$, $t = 2$, $(\lambda, \mu, \nu) = (3,-1,3)$)

(4) Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare indotta dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

relativamente alle basi cononiche del dominio e codominio.

(a) Determinare il valore di F sul generico vettore (x,y,z,w) di $\mathbb{R}^4$.

(b) Trovare la matrice di F rispetto alla base canonica del dominio e alla base $B = (e_3, e_2, e_1)$ del codominio.

Risposta:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) Considerare lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali e i seguenti sottoinsiemi:

$$S = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array} \right) : x_2 = x_3 \right\}, T = \left\{ \left(\begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{array} \right) : x_2 = -x_3 \right\}$$

(a) Dimostrare che S, T sono sottospazi vettoriali di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e trovare una base di ognuno di loro.

(b) Date le matrici

$$A = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{array} \right), \quad B = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{array} \right)$$

con $A \in S, B \in T$ determinarne le coordinate rispetto alla base trovata.