Esercizi su dipendenza e indipendenza lineare , basi

DOMANDE VERO/FALSO

(1) Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ generano V e $w \in V$ allora $v_1, \ldots, v_n, w$ generano ancora V. **V** **F**

(2) Se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V allora $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ è ancora una base di V. **V** **F**

(3) Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ generano V allora i vettori $v_1, \ldots, v_{n-1}$ generano ancora V. **V** **F**

(4) Non esiste alcun insieme di vettori $v_1, \ldots, v_n$ con $L(v_1, \ldots, v_n) = L(v_1, \ldots, v_{n-1})$ **V** **F**

(5) Se $V = L(v_1, \ldots, v_n)$ e V ha dimensione k, allora k vettori qualsiasi scelti fra $v_1, \ldots, v_n$ sono sempre linearmente indipendenti. **V** **F**

(6) Se $V = L(v_1, \ldots, v_n)$ e V ha dimensione k allora esistono k vettori scelti fra $v_1, \ldots, v_n$ che sono linearmente indipendenti. **V** **F**

(7) Se $L(v_1, \ldots, v_n)$ ha dimensione k allora esiste un solo sottoinsieme di k vettori scelti fra $v_1, \ldots, v_n$ che sono linearmente indipendenti. **V** **F**

(8) Se $v_1, \ldots, v_n, v$ sono vettori di V, $1 \leq h < n$ e $v \in L(v_1, \ldots, v_h)$ allora $v \notin L(v_{h+1}, \ldots, v_n)$. **V** **F**

(9) Se $v_1, \ldots, v_n, v$ sono vettori linearmente indipendenti di V, $1 \leq h < n$ e $v \in L(v_1, \ldots, v_h)$ allora $v \notin L(v_{h+1}, \ldots, v_n)$. **V** **F**

(10) Se $v_1, \ldots, v_n, v$ sono vettori linearmente indipendenti di V, $1 \leq h < n$ e $v \in L(v_1, \ldots, v_h)$, $v \neq \vec{0}$, allora $v \notin L(v_{h+1}, \ldots, v_n)$. **V** **F**

(11) Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti $1 \leq h < n$ allora $L(v_1, \ldots, v_h) \cap L(v_{h+1}, \ldots, v_n) = \emptyset$. **V** **F**

(12) Se i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, $1 \leq h < n$ allora $L(v_1, \ldots, v_h) \cap L(v_{h+1}, \ldots, v_n) = \{\vec{0}\}$.

(13) Due vettori diversi sono sempre linearmente indipendenti. **V** **F**

(14) Se W è un sottospazio di V e $(w_1, \ldots, w_n)$ è una base di W , allora $L(w_1, \ldots, w_n) = W$. **V** **F**

(15) Dato uno spazio vettoriale V, se $L(v_1, \ldots, v_n) = V$ allora i vettori $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti. **V** **F**

(16) se lo spazio vettoriale V è generato da k vettori, non può essere generato da meno di k vettori. **V** **F**

(17) Se $v \in L(v_1, v_2, v_3)$ allora $v_1 \in L(v, v_2, v_3)$. **V** **F**

ESERCIZI

(1) Dati i vettori $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,0,1), v_3 = (1,1,1)$ in $\mathbb{R}^3$ determina se $v_3 \in L(v_1, v_2)$, se $v_2 \in L(v_1, v_3)$, se $v_3 \in L(v_1, v_2)$.
Descrivi il sottospazio $L(v_1, v_2)$.
I vettori $v_1 = (1,0,1), v_2 = (0,0,1), v_3 = (1,1,1)$ sono linearmente indipendenti?
I vettori v_1, v_2 formano una base del sottospazio $L(v_1, v_2)$?
Scrivi il vettore $(\sqrt{2}, 0, 1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2.

(2) Dati i vettori $v_1 = (1,0,0,1), v_2 = (1,1,1,1), v_3 = (0,1,1,0)$, trova una base per lo spazio $L(v_1, v_2, v_3)$. È possibile scrivere in in due modi diversi il vettore $\vec{0}$ come combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, v_3?

(3) Nello spazio $\mathbb{R}^3$, siano $v_1 = (1,2,3)$ e $v_2 = (-1,0,1)$. Determina tutti i vettori che stanno in $L(v_1)$ e in $L(v_1, v_2)$. Lo spazio $L(v_1, v_2)$ è la retta che passa per v_1 e v_2? Lo spazio $L(v_1, v_2)$ contiene la retta che passa per v_1 e v_2?

(4) Data la base $B = (v_1, v_2, v_3)$ di $\mathbb{R}^3$ dove $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (0,1,-1)$, $v_3 = (0,0,2)$, trova il vettore colonna delle coordinate di $v = (1,2,4)$ rispetto alla base B. Data la base $B' = (v_2, v_3, -2v_1)$, trova il vettore colonna delle coordinate di $v = (1,2,4)$ rispetto alla base B'.

(5) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2x2 a coefficienti reali.
   (a) Trova due vettori linearmente dipendenti in V;
   (b) trova tre vettori linearmente dipendenti, ma a due a due linearmente indipendenti;
   (c) trova una base di V

(6) Considera l'insieme S delle successioni di numeri reali $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = a_0, a_1, a_2, \ldots$ tali che esiste un n con $a_m = 0$ per ogni $m \geq n$. Dimostra che S è uno spazio vettoriale con la somma definita da

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} = (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

e il prodotto per uno scalare definito da

$$\lambda(a_i)_{i\in\mathbb{N}} = (\lambda a_i)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Dimostra che S non è uno spazio vettoriale finitamente generato.