Primi Esercizi su Spazi Vettoriali, Combinazioni Lineari e Dipendenza Lineare

(1) Dati i vettori $v_1 = (0, -1, \sqrt{2}, 1/3), v_2 = (1, 0, -1, -2/5)$, determina le coordinate del vettore $2v_1 - v_2$;
se $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, determina le coordinate del vettore $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.

(2) Per ognuna delle seguenti coppie di vettori v_1, v_2, stabilisci se v_1, v_2 appartengono alla stessa retta per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e determina l'insieme delle loro combinazioni lineari $L(v_1, v_2)$:
$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1)$,
$v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (-\pi, -2\pi, -\pi)$.

(3) Per ognuna delle seguenti terne di vettori v_1, v_2, v_3, stabilisci se v_1, v_2, v_3 appartengono alla stesso piano per l'origine di $\mathbb{R}^3$ e determina l'insieme delle loro combinazioni lineari $L(v_1, v_2, v_3)$:
$v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 1), v_3 = (0, 2, 0)$;
$v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (-\pi, -0, -\pi)$, $v_3 = (2, 1, 1)$.

(4) Siano v, v_1, v_2, v_3 vettori in $\mathbb{R}^n$. Rispondi alle seguenti domande:
   (a) se $v \in L(v_1, v_2)$ allora $L(v_1, v_2) = L(v, v_1, v_2)$; **V** **F**
   (b) se $L(v_1, v_2) = L(v, v_1, v_2)$ allora $v \in L(v_1, v_2)$; **V** **F**
   (c) se $v \in L(v_1, v_2, v_3)$ allora $v \in L(v_1, v_2)$; **V** **F**
   (d) se $v \in L(v_1, v_2)$ allora $v \in L(v_1, v_2, v_3)$; **V** **F**
   (e) se $v_1 + 2v_2 = -v_1 + v_2$ allora v_1, v_2 sono linearmente dipedenti; **V** **F**
   (f) $L(v_1, v_2) = L(v_1, v_1 + v_2)$. **V** **F**

(5) Due vettori v_1, v_2 in $\mathbb{R}^2$ con $v_1, v_2 \neq \vec{0}$ e $v_1 \neq v_2$ sono sempre linearmente indipendenti. **V** **F**

(6) Dati $k > 1$ vettori $v_1, \ldots, v_k$ in $\mathbb{R}^n$ allora vale sempre:
   (a) $L(v_1, v_2 \ldots, v_k) = L(v_2, v_1 \ldots, v_k)$; **V** **F**
   (b) $L(v_1, \ldots, v_{k-1}) \subseteq L(v_1, \ldots, v_k)$; **V** **F**
   (c) $L(v_1, \ldots, v_{k-1}) \neq L(v_1, \ldots, v_k)$; **V** **F**
   (d) $v_k \notin L(v_1, v_2 \ldots, v_{k-1})$, se e solo se $L(v_1, \ldots, v_{k-1}) \neq L(v_1, \ldots, v_k)$. **V** **F**

(7) un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è a sua volta un insieme di vettori linearmente indipendenti; **V** **F**

(8) un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente dipendenti è a sua volta un insieme di vettori linearmente dipendenti; **V** **F**

(9) Determinare quali dei seguenti insiemi di vettori formano un insieme di vettori linearmenti indipendenti nel corrispondente spazio vettoriale V. Nel caso non siano indipendenti, trovare una loro combinazione lineare non banale uguale al vettore nullo, ed esprimere uno dei vettori come combinazione lineare degli altri.

(a) $v_1 = (1,0,1), v_2 = (2,-1,0), v_3 = (0,-5,10)$, nello spazio $V = \mathbb{R}^3$;
(b) $v_1 = (2,0,3), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,1,1)$ nello spazio $V = \mathbb{R}^3$;
(c) $v_1 = (0,0,0), v_2 = (0,1,0), v_3 = (1,1,1)$ nello spazio $V = \mathbb{R}^3$;
(d)
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
nello spazio vettoriale $M_{2x3}(\mathbb{R})$ delle matrici 2x3 a coefficienti reali.
(e) $v_1 = (1,1), v_2 = (-1,3), v_3 = (0,2)$ nello spazio $V = \mathbb{R}^2$.

(10) Considera lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni reali, con somma termine a termine e prodotto per uno scalare definito da
$$\lambda(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \ldots).$$
(a) Determina tre vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
(b) Determina un insieme infinito di vettori in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che ogni suo sottoinsieme finito sia un insieme di vettori linearmente indipendenti.

(11) Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti. Dimostra che i vettori v_1', v_2', v_3' sono ancora indipendenti, dove
$$v_1' = v_1, \quad v_2' = v_1 + v_2, \quad v_3' = v_1 + v_2 + v_3.$$

(12) Considera i numeri complessi come uno spazio vettoriale sui numeri reali $\mathbb{R}$, dove la somma fra vettori è l'usuale somma dei numeri complessi e il prodotto di un numero reale r per un complesso $z = a + ib$ è l'usuale prodotto $rz = ra + irb$.
(a) I vettori 1 ed i sono linearmente indipendenti; **V** | **F**
(b) i vettori 1 ed $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti; **V** | **F**
(c) i vettori i ed $-2i$ sono linearmente indipendenti; **V** | **F**
(d) $\mathbb{C} = L(1, i)$; **V** | **F**
(e) due vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre indipendenti; **V** | **F**
(f) due vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre dipendenti; **V** | **F**
(g) tre vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre indipendenti; **V** | **F**
(h) tre vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre dipendenti; **V** | **F**
(i) $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$; **V** | **F**
(j) $\mathbb{Q}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$. **V** | **F**