COGNOME NOME

CORSO DI LAUREA | **INF** | **TWM** | ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SIMULAZIONE SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE

Per ottenere la sufficienza bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 7 domande della parte V/F e risolvere correttamente due esercizi della seconda parte. Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 3 ore.

Domande VERO/FALSO

(1) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (x^2, x)$ è una trasformazione lineare; **V** | **F**

(2) se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è definita da $F(x, y) = (x + y, x + y)$, allora $dim(Ker(F)) = 0$; **V** | **F**

(3) se u, v, w sono vettori in uno spazio vettoriale V di dimensione 3 e generano V, allora sono linearmente indipendenti; **V** | **F**

(4) se una matrice $n \times m$ ha una riga nulla, allora ha rango zero; **V** | **F**

(5) se una matrice $n \times m$ ha una riga nulla, allora il rango è strettamente minore di m; **V** | **F**

(6) se una matrice $n \times m$ ha una riga nulla, allora il rango è strettamente minore di n; **V** | **F**

(7) una matrice $n \times n$ di rango n è invertibile; **V** | **F**

(8) esiste una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che $dim(Im(F)) = 3$; **V** | **F**

(9) l'insieme $W = \{(k, k, 1 - k) \in \mathbb{R}^3 : k \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; **V** | **F**

(10) i vettori $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (-1, 1, -1)$ generano uno spazio vettroriale di dimensione 2 in $\mathbb{R}^3$. **V** | **F**

Esercizî

(1) Considerare i vettori $v_1 = 2e_1 - e_2 - e_3$ $v_2 = -e_2$, $v_3 = 2e_2 + e_3$, dove $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
  (a) Dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
  (b) Trovare le matrici del cambiamento di base $M^B_{\mathcal{E}_3}(id)$ e $M^{\mathcal{E}_3}_B(id)$.
  (c) Utilizzando la matrice $M^{\mathcal{E}_3}_B(id)$, determinare le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto alla base B.
  (d) Determinare l'insieme W dei vettori v tali che $||v||_{\mathcal{E}_3} = ||v||_B$; dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e trovarne la dimensione e una base.

(2) Sia W il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$:
$$W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}.$$
  (a) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.
  (b) Determinare la dimensione di W e una base di W.
  (c) Considerare il sottospazio W' generato dai vettori $(1, -1, 0)$ e $(1, 1, 1)$. Dimostrare che $V = W + W'$ e determinare $W \cap W'$. Trovare due coppie $(w_1, w'_1) \neq (w_2, w'_2) \in W \times W'$ tali che $w_1 + w'_1 = w_2 + w'_2$.
  (d) Trovare un sottospazio W' tale che $\mathbb{R}^3 = W + W'$ e $W \cap W' = \{(0, 0, 0)\}$.

(3) Considerare i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$: $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (0, 2, 0, 1)$.
  (a) Stabilire se esiste una base di $\mathbb{R}^4$ che contiene i vettori v_1, v_2. In caso positivo esibire due basi distinte B_1, B_2 di $\mathbb{R}^4$ che contengono i vettori v_1, v_2.
  (b) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $F(v_1) = e_1, F(v_2) = e_2$ (dove e_1, e_2 sono il primo ed il secondo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^2$). In caso positivo, esibire almeno due diverse trasformazioni F_1, F_2 che soddisfano questa proprietà.
  (c) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa il punto (b) e inoltre $dim(KerF) = 2$. In caso positivo, determinare le matrici $M^{B_1}_{\mathcal{E}_2}(F)$, $M^{B_2}_{\mathcal{E}_2}(F)$ dove B_1, B_2 sono le matrici trovate al punto 1.
  (d) Determinare se esiste un'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ che soddisfa il punto (b) e inoltre $dim(KerF) = 3$.

(4) Sia V uno spazio vettoriale sui reali. Dati $v_1 \ldots, v_n$ in V dare la definizione del sottspazio $L(v_1, \ldots, v_n)$ generato da $v_1 \ldots, v_n$.
Dimostrare inoltre che si ha
$$L(u, v, v + w) = L(u, v, v - w)$$
per ogni $u, v, w \in V$.