COGNOME NOME

CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SIMULAZIONE SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE

Per ottenere la sufficienza bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 7 domande della parte V/F e risolvere correttamente due esercizi della seconda parte. Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 3 ore.

Domande VERO/FALSO

(1) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = x$ è una trasformazione lineare; **V** | **F**

(2) se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è definita da $F(x, y) = (y, x)$, allora $dim(Ker(F)) = 0$; **V** | **F**

(3) il sottospazio generato dai i vettori $v_1 = (1, 1), v_2 = (-2, -2)$ ha dimensione 2 in $\mathbb{R}^2$; **V** | **F**

(4) In $\mathbb{R}^3$ esistono due sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di dimensione 2 tali che $U_1 \cap U_2 = \{(0, 0, 0)\}$; **V** | **F**

(5) esitono 5 vettori che sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^4$; **V** | **F**

(6) se $v = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e A è una matrice $m \times n$, il vettore colonna

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

è una combinazione lineare delle colonne di A; **V** | **F**

(7) la matrice quadrata 4×4 che ha tutti i coefficienti uguali a zero è invertibile; **V** | **F**

(8) se $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (1, 0, 0)$ allora $B = (v_1, v_2)$ è una base per il sottospazio $W = \{(k, h, 0) : k, h \in \mathbb{R}\}$ di $\mathbb{R}^3$; **V** | **F**

(9) data una qualsiasi terna di vettori (v_1, v_2, v_3), se v_1, v_2 sono linearmente indipendenti ed v_2, v_3 sono linearmente indipendenti, allora v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti; **V** | **F**

(10) se $v_1 = (0, 0, -2)$, $v_2 = (0, 4, 1)$ e $v_3 = (5, 6, 7)$, allora $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. **V** | **F**

Esercizî

(1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codominio, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di F sul generico vettore (x, y, z) del dominio.
(b) Determinare la dimensione dell'immagine $Im(F)$ di F e la dimensione del nucleo $Ker(F)$ di F.
(c) Determinare una base per l'immagine di F e, se possibile, un vettore che non appartiene a tale immagine.
(d) Stabilire se F è iniettiva, suriettiva, biunivoca.
(e) Siano $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 0)$. Dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice di F rispetto alla base B per il dominio e la base canonica per il codominio.

(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (y, x, 0).$$

(a) Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica per dominio e codominio.
(b) Determinare una base B per cui la matrice $M^B_{\mathcal{E}_3}(F)$ è diagonale.
(c) Trovare la matrice del cambiamento di base $M^{\mathcal{E}_3}_B(id)$.
(d) Se $||v||_B$ sono le coordinate del vettore v nella base B, quale rapporto c'è fra $M^{\mathcal{E}_3}_B(id)$, $||v||_B$ e $||v||_{\mathcal{E}_3}$?

(3) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 1, 0) \quad v_2 = (0, 1, 0, 1) \quad v_3 = (1, 1, 1, 1).$$

(a) Determinare un vettore che non appartiene a W e descrivere i vettori che appartengono a W;
(b) trovare una base per W;
(c) determinare un sottospazio U tale che $U \cap W = \{(0, 0, 0, 0)\}$ e $dim(U) + dim(W) = 3$.

(4) Dare la definizione di immagine di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e discutere la seguente affermazione, dimostrandola o fornendo un controesempio:

se la matrice di F rispetto alle basi canoniche ha tutte le colonne uguali, allora la dmensione dell'immagine di F è 1.