Ricapitolando

$C=R^2$ $i=(0,1)$

ogni numero complesso (a,b) si scrive come

$z=a+ib$

$a=Re(z)$, $b=Im(z)$

somma $(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+ i\,(b+b')$

elemento neutro $0+i0=0$

opposto $-(a+ib)= -a-ib$

prodotto $(a+ib)(a'+ib')=(aa'+bb')+i\,(ab'-ba')$

elemento neutro $1+i0=1$

inverso $1/(a+ib)= (a+ib)^{-1}=a/(a^2+b^2)- i\, b/(a^2+b^2)$

+,x sono operazioni associative e commutative

;

+ distribuisce su x:

$z(z'+z'')=zz'+zz''$

Confronto fra coordinate polari e cartesiane

$z=a+ib$ coordinate polari (ρ,α)

identifichiamo z con il vettore che ha origine in (0,0) e estremo in $z=(a,b)$

$\rho=|\mathbf{z}|$ (modulo di z) è la lunghezza del vettore z;

$\alpha=$ Arg(z) è la misura antioraria dell'angolo formato dalla semiretta positiva delle ascisse e dal vettore z.

fig1

Trigonometria in pillole fig.2,3

Dal cerchio trigonometrico ricordando che

$\mathrm{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \mathbf{1}$

α	sen(α)	cos(α)
0°	0	1
30°	1/2	sqrt(3)/2
45°	sqrt(2)/2	sqrt(2)/2
60°	sqrt(3)/2	1/2
90°	1	0

Angoli in altri quadranti

$$\mathbf{sen}\,(\alpha) = \mathbf{sen}\,(180^o - \alpha)$$
$$\mathbf{cos}\,(\alpha) = -\cos\,(180^o - \alpha)$$
$$\mathbf{sen}\,(\alpha) = -\mathbf{sen}\,(\alpha)$$
$$\mathbf{cos}\,(\alpha) = \cos(-\alpha)$$

Una differenza importante

Le coordinate polari sono ridondanti:

$(1, 45^0)$ rappresenta lo stesso numero complesso di

$(1, 45^0 + 360^0) = (1, 405^0)$

(ρ, ϑ) **rappresenta lo stesso numero complesso di**
...$(\rho, \vartheta - 2x360^0)$, $(\rho, \vartheta - 360^0)$, $(\rho, \vartheta + 360^0)$, $(\rho, \vartheta + 2x360^0)$...

Forma Trigonometrica

$z=a+ib$

con coordinate polari (ρ, ϑ)

$a=\rho \cos(\vartheta)$

$b=\rho \text{ sen}(\vartheta)$

quindi $z=\rho\ (\cos(\vartheta)+ i \text{ sen}(\vartheta))$

regola della moltiplicazione in forma trigonometrica

$z'=\rho'\ (\cos(\vartheta')+ i \text{ sen}(\vartheta'))$

$zz'=\rho\rho'\ (\cos(\vartheta+\vartheta')+ i \text{ sen}(\vartheta+\vartheta'))$

ridondanza: se k è un numero intero

$\rho\ (\cos(\vartheta)+ i \text{ sen}(\vartheta))= \rho\ (\cos(\vartheta+k360^0)+ i \text{ sen}(\vartheta+k360^0))$

Uguaglianza in forma trigonometrica

$\rho\,(\cos(\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta)) = \rho'\,(\cos(\vartheta') + i\,\mathrm{sen}(\vartheta'))$

se e solo se

$\rho = \rho'$ e $\vartheta = \vartheta' + k\,360^0$ per k intero

ex

$2(\cos(405^0) + i\ \mathrm{sen}(405^0)) = 2(\cos(45^0) + i\,\mathrm{sen}(45^0))$

Potenze

Nei numeri reali, l'equazione $x^n = 1$
ha una sola soluzione $x = 1$ per n dispari
e de soluzioni $x = 1, x = -1$ per n pari

Nei numeri complessi ci sono
molte più soluzioni

Potenze in forma trigonometrica

$$z=\rho\ (\cos(\vartheta)+ \mathrm{sen}(\vartheta))$$

$$z'=\rho'\ (\cos(\vartheta')+ \mathrm{sen}(\vartheta'))$$

$$zz'=\rho\rho'\ (\cos(\vartheta+\vartheta')+ \mathrm{sen}(\vartheta+\vartheta'))$$

$$z^n=\rho^n\ (\cos(n\vartheta)+ \mathrm{sen}(n\vartheta))$$

fig 4

Complessi e radici n-esime dell'unità

Cerchiamo le soluzioni di

$z^n=1$

fig 5,6,7

In generale, $z^n=1$ ha n soluzioni,
che si trovano sui vertici di un poligono regolare
di n lati in cui un vertice è posto su 1

complessi e radici di polinomi

Teorema fondamentale dell'algebra

ogni polinomio p

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

di grado n>1 a coefficienti complessi ammette sempre una radice complessa

$$a_n \mathbf{z}^n + a_{n-1} \mathbf{z}^{n-1} + \ldots + a_0 = 0;$$

(anzi: n radici contando la loro molteplicità)

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0 = a_n (z-z_0)^r x(z-z_1)^s x \ldots x(z-z_k)^t$$

$$r+s+\ldots t=n$$

Radici

Ogni numero complesso $z_0=a+ib$ diverso da zero ha n radici ennesime

$$z^n= a+ib$$

ha n soluzioni

esempio soluzioni di $z^2=-1$

- cerchiamo le soluzioni in forma trigonometrica

$$z=\rho\,(\cos(\vartheta)+\text{sen}(\vartheta))$$

esempio soluzioni di $z^2=-1$

- cerchiamo le soluzioni in forma trigonometrica

$$z=\rho\ (\cos(\vartheta)+ i \operatorname{sen}(\vartheta))$$

- scriviamo anche 1 in forma trigonometrica

$$-1= \cos(180°)+i \operatorname{sen}(180°)$$

l'equazione da risolvere diventa

$$\rho^2\ (\cos(2\vartheta)+ i \operatorname{sen}(2\vartheta)) =(\cos(180°)+i \operatorname{sen}(180°))$$

da cui

$\rho^2=1$ **quindi** $\rho=1$ **(deve essere >0!)**

$2\vartheta= 180°$ quindi $\vartheta= 90°$

una soluzione è $z=\cos(90°)+i \operatorname{sen}(90°)= i$

perche' non troviamo anche la soluzione -i?

Per non perdere soluzioni dobbiamo cercare

ϑ tale che

$2\vartheta = 180° + k\,360°$ quindi $\vartheta = 90° + k/2\; 360°$

per k=0 ottengo $\vartheta_0 = 90°$

per k=1 ottengo $\vartheta_1 = 270°$

che corrisponde alla soluzione mancante

$z = \cos(270°) + i\,\mathrm{sen}(270°) = -i$

soluzioni di $z^n=z_0$

- cerchiamo le soluzioni in forma trigonometrica

$$z=\rho\,(\cos(\vartheta)+i\,\mathrm{sen}(\vartheta))$$

- scriviamo anche z_0 in forma trigonometrica

$$z_0=\rho_0\,(\cos(\vartheta_0)+i\,\mathrm{sen}(\vartheta_0))$$

l'equazione da risolvere diventa

$$\rho^n\,(\cos(n\vartheta)+i\,\mathrm{sen}(n\vartheta))=\rho_0\,(\cos(\vartheta_0)+i\,\mathrm{sen}(\vartheta_0))$$

da cui

$\rho^n=\rho_0$ **quindi** $\rho=$ **radice ennesima positiva di** ρ_0

$n\vartheta=\vartheta_0+k\,360°$ quindi $\vartheta=\vartheta_0/n+k/n\,360°$

(in radianti: $n\vartheta=\vartheta_0+2k\pi$ quindi $\vartheta=\vartheta_0/n+2k\pi/n$)

per $k=0,\ldots,n-1$ si trovano tutte le soluzioni

Esempio: soluzioni di $z^3 =$ sqrt(2)+ i sqrt(2)

- cerchiamo le soluzioni in forma trigonometrica

  $z=\rho\ (\cos(\vartheta)+ \text{sen}(\vartheta))$

- scriviamo anche sqrt(2)+ i sqrt(2) in forma trigonometrica

  sqrt(2)+ i sqrt(2) $= 2(\cos(\pi/4)+ \text{sen}(\pi/4))$

  l'equazione da risolvere diventa

$$\rho^3(\cos(3\vartheta)+ \text{sen}(3\vartheta)) = 2\ (\cos(\pi/4)+ \text{sen}(\pi/4))$$

da cui

$\rho^3 = 2$ quindi $\rho=$ radice terza di $2=2^{-3}$

- $3\vartheta= \pi/4+2k\pi$ quindi $\vartheta= \pi/12 +(2/3)k\pi$
- per k=0,1,2 trovo tutte le soluzioni

$$2^{-3}\ (\cos(\pi/12)+i\ \text{sen}(\pi/12))$$
$$2^{-3}\ (\cos(9\pi/12)+i\ \text{sen}(9\pi/12))$$
$$2^{-3}\ (\cos(17\pi/20)+i\ \text{sen}(17\pi/20))$$