Numeri complessi

Sistemi Numerici

- Numeri naturali 0,1,2,3,....
  operazioni: + con elemento neutro 0;
  x con elemento neutro 1;

- non esiste l'opposto rispetto alla somma:

  non posso risolvere equazioni del tipo
  n + x = 0 con **n** numero naturale fissato.

Dai Naturali agli Interi

- Interi ..., -10,-9,-8,.., 0, 1, 2, 3, ..
  operazioni: + con elemento neutro 0;
  x con elemento neutro 1;
- ogni elemento ha un opposto e posso risolvere equazioni del tipo
  $$\mathbf{k} + x = \mathbf{h}$$
  con **k,h** interi fissati.

Dai Naturali agli Interi

- Interi ..., -10,-9,-8,.., 0, 1, 2, 3, ..
  operazioni: + con elemento neutro 0;
  x con elemento neutro 1;
- ogni elemento ha un opposto e posso risolvere equazioni del tipo

  $$\mathbf{k} + x = \mathbf{h}$$

  con **k,h** interi fissati.

- non esiste l'inverso rispetto alla moltiplicazione; non posso risolvere equazioni del tipo

  $$\mathbf{k}\, x = 1$$

  con **k** intero fissato.

Dagli Interi ai Razionali

Razionali: ..., -3/2,..., -1,..., -1/2,...,0,..,1/2,...,3/2,..

operazioni: + con elemento neutro 0;

x con elemento neutro 1;

- ogni elemento ha un opposto e posso risolvere equazioni del tipo

$$\mathbf{q} + x = \mathbf{q}'$$

con **q** intero fissato.

Dagli Interi ai Razionali

Razionali: ..., -3/2,..., -1,..., -1/2,...,0,..,1/2,...,3/2,..

operazioni: + con elemento neutro 0;

x con elemento neutro 1;

- ogni elemento ha un opposto e posso risolvere equazioni del tipo

  $$\mathbf{q} + x = \mathbf{q'}$$

  con **q** intero fissato.
- ogni elemento diverso da zero ha un inverso rispetto alla moltiplicazione e posso risolvere equazioni del tipo

  $$\mathbf{q}\, x = \mathbf{q'}$$

  con **q** , **q'** razionali fissati e **q** a diverso da zero.

Numeri e geometria

Fissiamo una retta con un'origine, un verso e una unità di misura:

i naturali, interi e razionali

corrispondono a punti della retta

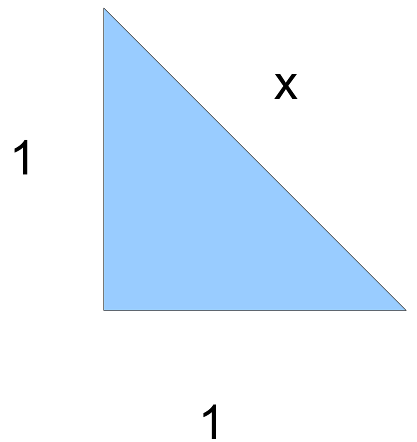
(numero = coordinata del punto sulla retta)

fig1

Dai Razionali ai Reali

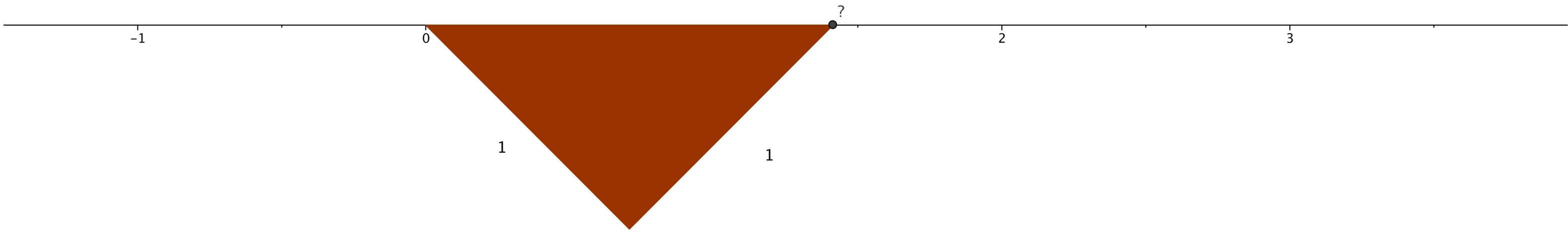
- Non esiste nessuna misura razionale per l'ipo-tenusa di un triangolo rettangolo isoscele di lato 1

$1^2+1^2= x^2$



Non esiste alcun numero razionale x tale che $x^2=2$

fig2


?
−1
0
2
3
1
1

- Rappresentazione decimale dei Razionali

1/2=0,5 1/3=0,33333...

3180/9900=0,32121212121...

I numeri razionali hanno una rappresentazione decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola seguito possibilmente da un periodo finito che si ripete infinite volte.

- Rappresentazione decimale dei Razionali

1/2=0,5 1/3=0,33333...

3180/9900=0,32121212121...

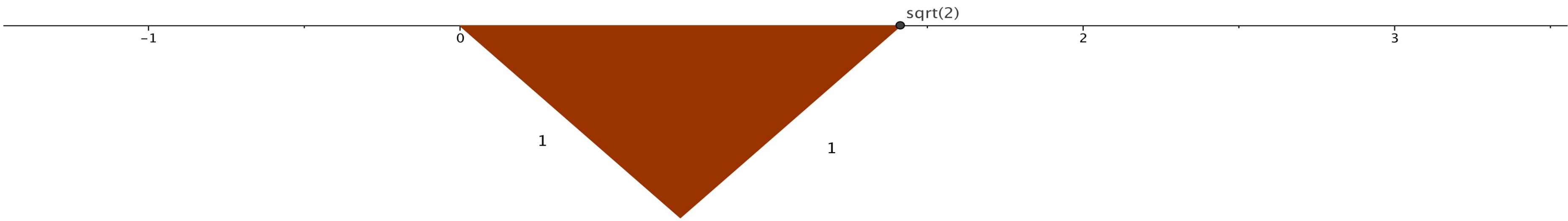
I numeri razionali hanno una rappresentazione decimale con un numero finito di cifre dopo la virgola seguito possibilmente da un periodo finito che si ripete infinite volte.

Per riempire i “buchi” lasciati dalle coordinate razionali occorre considerare numeri decimali con parte decimale non necessariamente periodica

Dai Razionali ai Reali

ad ogni punto della retta corrisponde una coordinata reale

$$\sqrt{2} = 1,41421356237309504880 1\ldots$$



Equazioni risolvibili e non sui reali

Operazioni, +, x con elementi neutri 0, 1;

Oltre alle equazioni risolvibili sui razionali,
si possono risolvere equazioni del tipo

x^2= **r** con **r** reale **positivo**

Equazioni risolvibili e non sui reali

Operazioni, +, x con elementi neutri 0, 1;

Oltre alle equazioni risolvibili sui razionali,
si possono risolvere equazioni del tipo

x^2= **r** con **r** reale **positivo**

Le equazioni

x^2= **r** con **r** reale **negativo**

non hanno soluzione;
per trovare una soluzione a questo tipo di equazioni dobbiamo capire meglio cosa significa moltiplicare per -1 !

fig3

Moltiplicare per -1 equivale a ruotare il punto di 180 gradi (in senso antiorario) intorno all'origine,

Moltiplicare per -1 equivale a ruotare il punto di 180 gradi (in senso antiorario) intorno all'origine,

Moltiplicare più volte per -1 equivale a ruotare più volte rispetto all'origine.

$$r \times (-1) \times (-1) = r$$

Moltiplicare per -1 equivale a ruotare il punto di 180 gradi (in senso antiorario) intorno all'origine,

Moltiplicare più volte per -1 equivale a ruotare più volte rispetto all'origine.

$$r \times (-1) \times (-1) = r$$

Vogliamo trovare un nuovo numero $\boldsymbol{i}$ con

$$\boldsymbol{i}^2 = -1$$

per cui varrà $r \times \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = r \times (-1) = -r$

Moltiplicare per -1 equivale a ruotare il punto di 180 gradi (in senso antiorario) intorno all'origine,

Moltiplicare più volte per -1 equivale a ruotare più volte rispetto all'origine.

$$r \times (-1) \times (-1) = r$$

Vogliamo un nuovo numero i con

$$i^2 = -1$$

per cui varrà $r \times i \times i = r \times (-1) = -r$

Moltiplicare per i^2 = ruotare di 180 gradi

Moltiplicare per i = ruotare di 90 gradi !

fig 4

Aggiungere $\boldsymbol{i}$ **r**   non basta.

Dobbiamo poter sommare e moltiplicare numeri fra loro: quanto fa

$$\boldsymbol{i} + 1 = ?$$

fig 5

Numeri complessi

- I numeri complessi corrispondono ai punti del piano sono quindi rappresentabili dalle loro coordinate (a,b):

$$i = (0,1)$$

$$1 + i = (1,1)$$

$$z = a + i\,b = (a,b)$$

a= parte reale di z; Re(z)

b= parte immaginaria di z; Im(z)

Somma

Due numeri complessi si sommano con la regola del parallelogramma:

se $z=(a,b)$ e $z'=(a',b')$ allora

$$z+z'=(a+a',b+b')$$

Somma

Due numeri complessi si sommano con la regola del parallelogramma:

se $z=(a,b)$ e $z'=(a',b')$ allora

$$z+z'=(a+a',b+b')$$

se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$ e $z' = a' + \boldsymbol{i}\, b'$

allora

$$z+z'= (a+a')+ (b+b')\boldsymbol{i}$$

Coordinate polari

Un punto del piano (un numero complesso)
diverso dall'origine (0,0)
può essere descritto, oltre che dalle
coordinate cartesiane

$$z=(a,b)$$

anche dalle sue coordinate polari

$$z=(r\ ,\ \vartheta)$$

(ϑ **si legge** teta)

fig 6

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0		
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$		
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0		
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale $r>0$ reale $r<0$	$(r,0)$	
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$		
$\boldsymbol{i}\,r$, con $r>0$ $\boldsymbol{i}\,r$, con $r<0$		
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$		
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0		
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	$(r,0^{o})$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$		
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0		
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	(r,0°) (-r,180°)
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$		
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0		
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale $r>0$ reale $r<0$	$(r,0)$ $(r,0)$	$(r,0^{o})$ $(-r,180^{o})$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	$(0,1)$	
$\boldsymbol{i}\,r$, con $r>0$ $\boldsymbol{i}\,r$, con $r<0$		
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	(r,0°) (-r,180°)
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0		
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale $r>0$ reale $r<0$	$(r,0)$ $(r,0)$	$(r,0^{o})$ $(-r,180^{o})$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-\,i}$	$(0,1)$ $(0,-1)$	$(1,90^{o})$
$\boldsymbol{i}\,r$, con $r>0$ $\boldsymbol{i}\,r$, con $r<0$		
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	(r,0°) (-r,180°)
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{- i}$	(0,1) (0,-1)	(1,90°) (1,270°) o (1,-90°)
$\boldsymbol{i}$ r **,** con r>0 $\boldsymbol{i}$ r **,** con r<0		
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	(r,0°) (-r,180°)
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	(1,90°) (1,270°) o (1,-90°)
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0	(0,r)	
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	$(r,0^o)$ $(-r,180^o)$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	$(1,90^o)$ $(1,270^o)$ o $(1,-90^o)$
$\boldsymbol{i}$ r **,** con r>0 $\boldsymbol{i}$ r **,** con r<0	(0,r) (0,r)	
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	(r,0°) (-r,180°)
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	(1,90°) (1,270°) o (1,-90°)
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0	(0,r) (0,r)	(r,90^0)
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	$(r,0^o)$ $(-r,180^o)$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	$(1,90^o)$ $(1,270^o)$ o $(1,-90^o)$
$\boldsymbol{i}$ r **,** con r>0 $\boldsymbol{i}$ r **,** con r<0	(0,r) (0,r)	$(r,90^0)$ $(-r,270^0)$ o $(-r,-90^o)$
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$		

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	$(r,0^{o})$ $(-r,180^{o})$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	$(1,90^{o})$ $(1,270^{o})$ o $(1,-90^{o})$
$\boldsymbol{i}$ r **,** con r>0 $\boldsymbol{i}$ r **,** con r<0	(0,r) (0,r)	$(r,90^{0})$ $(-r,270^{0})$ o $(-r,-90^{o})$
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$	(1,1)	

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	$(r,0^o)$ $(-r,0^o)$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	$(1,90^o)$ $(1,270^o)$ o $(1,-90^o)$
$\boldsymbol{i}$ r , con r>0 $\boldsymbol{i}$ r , con r<0	(0,r) (0,r)	$(r,90^0)$ $(-r,270^0)$ o $(-r,-90^o)$
1+$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$	(1,1) (a,b)	

Riassumendo

numero complesso	coordinate cartesiane	coordinate polari
reale r>0 reale r<0	(r,0) (r,0)	$(r,0^o)$ $(-r,180^o)$
$\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{-i}$	(0,1) (0,-1)	$(1,90^o)$ $(1,270^o)$ o $(1,-90^o)$
$\boldsymbol{i}$ r **,** con r>0 $\boldsymbol{i}$ r **,** con r<0	(0,r) (0,r)	$(r,90^0)$ $(-r,270^0)$ o $(-r,-90^o)$
$1+\boldsymbol{i}$ $\boldsymbol{a+ib}$	(1,1) (a,b)	$(sqrt(2),45^0)$?

Le coordinate polari sono utili per moltiplicare numeri complessi

- Moltiplicare per i che ha c.p $(1,90^{o})$ significa ruotare di 90^{o} in senso antiorario;

Le coordinate polari sono utili per moltiplicare numeri complessi

- Moltiplicare per i che ha c.p $(1,90^o)$ significa ruotare di 90^o in senso antiorario;
- Moltiplicare per un numero reale positivo (r,0) significa moltiplicare il modulo per r;

Le coordinate polari sono utili per moltiplicare numeri complessi

- Moltiplicare per i che ha c.p $(1,90^{\circ})$ significa ruotare di 90° in senso antiorario;
- Moltiplicare per un numero reale positivo $(r,0)$ significa moltiplicare il modulo per r;
- Moltiplicare per $-1 =(0,180^{\circ})$ significa ruotare di 180° in senso antiorario;

Le coordinate polari sono utili per moltiplicare numeri complessi

- Moltiplicare per i che ha c.p (1,90º) significa ruotare di 90º in senso antiorario;
- Moltiplicare per un numero reale positivo (r,0) significa moltiplicare il modulo per r;
- Moltiplicare per -1 =(0,180º) significa ruotare di 180º in senso antiorario;
- Moltiplicare per un numero reale negativo (r,180º) significa ruotare di 180º in senso antiorario e moltiplicare il modulo per r ;

Le coordinate polari sono utili per moltiplicare numeri complessi

- Moltiplicare per i che ha c.p $(1,90^o)$ significa ruotare di 90^o in senso antiorario;
- Moltiplicare per un numero reale positivo $(r,0)$ significa moltiplicare il modulo per r;
- Moltiplicare per $-1 =(0,180^o)$ significa ruotare di 180^o in senso antiorario;
- Moltiplicare per un numero reale negativo $(r,180^o)$ significa ruotare di 180^o in senso antiorario e moltiplicare il modulo per r ;
- Moltiplicare per un numero complesso $\mathbf{z}=(r , \vartheta)$ significa ruotare di ϑ^o e moltiplicare il modulo per **r**

fig 7

Regola della moltiplicazione fra complessi in coordinate polari

se z ha c.p. = (r, ϑ) z' ha c.p. = (r', ϑ')

$\mathbf{z\,z'}$ ha c.p. = $(rr', \vartheta+\vartheta')$

Regola della moltiplicazione fra complessi in coordinate polari

se z ha c.p. $= (r , \vartheta)$ z' ha c.p. $= (r' , \vartheta')$

$z\,z'$ ha c.p. $= (rr', \vartheta+\vartheta')$

se z ha c.p. $= (r , \vartheta)$ **con $r>0$ e** z' ha c.p. $= (1/r , -\vartheta)$

chi è **$z\,z'$?**

Regola della moltiplicazione fra complessi in coordinate polari

se z ha c.p. = (r, ϑ) z' ha c.p. = (r', ϑ')

zz' ha c.p. = $(rr', \vartheta+\vartheta')$

se z ha c.p. = (r, ϑ) con $r>0$ e z' ha c.p. = $(1/r, -\vartheta)$

chi è zz' ?

zz' **ha c.p.** = $(1,0)$

quindi $zz'=1$ e $z'=1/z$

Coniugato di un numero complesso

Se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$

il suo coniugato $\bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$.

Coniugato di un numero complesso

Se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$

il suo coniugato $\bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$.

Se z ha coordinate polari (r, ϑ)

$\bar{z}$ ha coordinate polari $(r, -\vartheta)$

Coniugato di un numero complesso

Se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$

il suo coniugato $\bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$.

Se z ha coordinate polari (r, ϑ)

$\bar{z}$ ha coordinate polari $(r, -\vartheta)$

$z\,\bar{z}$ ha coordinate polari $(r^2, 0)$

Coniugato di un numero complesso

Se $z = a + \boldsymbol{i}\, b$

il suo coniugato $\bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$.

Se z ha coordinate polari (r, ϑ)

$\bar{z}$ ha coordinate polari $(r, -\vartheta)$

$z\,\bar{z}$ ha coordinate polari $(r^2, 0)$

quindi $z\,\bar{z}$ è **un numero reale positivo**

Moltiplicazione in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b, \quad z' = a' + \boldsymbol{i}\, b'$

$zz' = (a + \boldsymbol{i} b)(a' + \boldsymbol{i} b') =$

Moltiplicazione in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b, \quad z' = a' + \boldsymbol{i}\, b'$

$zz' = (a + \boldsymbol{i} b)(a' + \boldsymbol{i} b') =$

$aa' + \boldsymbol{i} ba' + \boldsymbol{i} ab' + \boldsymbol{i}^2\, bb' =$

Moltiplicazione in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b, \quad z' = a' + \boldsymbol{i}\, b'$

$zz' = (a + \boldsymbol{i} b)(a' + \boldsymbol{i} b') =$

$aa' + \boldsymbol{i} ba' + \boldsymbol{i} ab' + \boldsymbol{i}^2\, bb' =$

$aa' - bb' + \boldsymbol{i}\,(ab' + ba')$

Inverso in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b \qquad \bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$

$z\bar{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b)(a - \boldsymbol{i}\, b) =$

Inverso in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b \qquad \bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$

$z\bar{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b)(a - \boldsymbol{i}\, b) =$
$a^2 + \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}^2\, b^2 =$

Inverso in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b \qquad \bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$

$z\bar{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b)(a - \boldsymbol{i}\, b) =$

$a^2 + \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}^2\, b^2 =$

$a^2 + b^2$

Inverso in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b \qquad \bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$

$z\bar{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b)(a - \boldsymbol{i}\, b) =$
$a^2 + \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}^2\, b^2 =$
$a^2 + b^2$

$1/z =$

Inverso in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b \qquad \bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$

$z\bar{z} = (a + \boldsymbol{i}\, b)(a - \boldsymbol{i}\, b) =$
$a^2 + \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}^2\, b^2 =$
$a^2 + b^2$

$1/z = \bar{z}/\, z\bar{z} = \bar{z}/(a^2 + b^2) =$

Inverso in coordinate cartesiane

$z = a + \boldsymbol{i}\, b \qquad \bar{z} = a - \boldsymbol{i}\, b$

$$z\bar{z} = (a+\boldsymbol{i}\, b)(a - \boldsymbol{i}\, b) =$$
$$a^2 + \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}\, ba - \boldsymbol{i}^2\, b^2 =$$
$$a^2 + b^2$$

$$1/z = \bar{z}/\, z\bar{z} = \bar{z}/(a^2 + b^2) =$$

$$a/(a^2 + b^2) + \boldsymbol{i}\, b/(a^2 + b^2)$$