Esercizi sui Numeri Complessi a.a. 12/13

Nel seguito, $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$ è l'insieme dei numeri complessi con le operazioni di somma e prodotto definite da:

$$(a+ib)+(a'+ib') = (a+a')+i(b+b'), \quad (a+ib)(a'+ib') = (aa'-bb')+i(ab'+ba'),$$

(1) Svolgere le operazioni sottoindicate e trovare la parte reale e la parte immaginaria del risultato ottenuto:

$$(1-2i)+(\sqrt{2}-i) \quad (1-2i)+(\sqrt{2}-i), \quad (1+2i)\cdot(1-2i), \qquad (1-2i)^3$$

$$(1+i)^3, \qquad \frac{3-2i}{-1+i}. \qquad 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 - 2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3.$$

(2) Per quali numeri reali x il numero complesso $z = ((x+4)+ix)(x-3+i)$ è un numero reale?

(3) Se $z = a + ib$, il numero complesso $\overline{z} = a - ib$ si dice il *coniugato* di z. Dati due numeri complessi z, z' dimostrare che $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z}'$, $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z}'$. Quali sono i numeri complessi tali che $z = \overline{z}$?

(4) Sia $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$: calcolare la forma trigonometrica di z e di z^3. Risolvere lo stesso esercizio per i numeri: $1/2 - i\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/2 + i/2$ e $3/\sqrt{2} - i3/\sqrt{2}$.

(5) Determinare la parte reale e la parte immaginaria del numero complesso z che ha modulo 2 e argomento $(5/6)\pi$. Svolgere lo stesso esercizio se il modulo è $\sqrt{2}$ e l'argomento è $(5/3)\pi$.

(6) Trovare la parte reale, la parte immaginaria, il modulo e l'argomento principale dei seguenti numeri complessi:

$$z = 3, \quad z = -3, \quad z = i - \sqrt{3}, \quad z = -i\pi/2.$$

(7) Sia z il numero complesso $1 + i$. Il numero complesso z^3 è:

il doppio di $i - 1$;	**V** **F**
$2\sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$;	**V** **F**
$2(cos(\frac{\pi}{2}) + isen(\frac{\pi}{2}))$	**V** **F**

(8) Se $z = -2(cos(\pi/4) + isen(\pi/4))$ allora :

Il modulo di z è -2 e l'argomento è $\pi/4$;	**V** **F**
Il modulo di z è 2 e l'argomento è $\pi/4$;	**V** **F**
Il modulo di z è 2 e l'argomento è $5\pi/4$;	**V** **F**

(9) Trovare la forma trigonometrica del numero complesso
$$z = -(cos(\pi/4) + isen(3\pi/4)).$$

(10) Sia $z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$ un numero complesso non nullo, scritto in forma trigonometrica.
La forma trigonometrica del coniugato $\overline{z}$ di z è
$\overline{z} = \rho(cos(\theta) + isen(-\theta))$; **V** | **F**
mentre la forma trigonometrica dell'inverso z^{-1} di z è
$z^{-1} = \rho(cos(-\theta) + isen(-\theta))$ **V** | **F**

(11) Sia $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi e $\phi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $\phi(z) = \overline{z}$. Calcolare la funzione composta $\phi \circ \phi$ e determinare se ϕ è iniettiva, suriettiva, biunivoca.

(12) Trovare un numero complesso z_0 tale che per qualsiasi numero complesso z il numero $z_0 z$ sia ottenuto ruotando il vettore z intorno all'origine in senso antiorario di $\pi/4$ radianti.
Svolgere lo stesso esercizio per la rotazione oraria di $\pi/3$ radianti.

(13) Siano $z = \rho(cos(\theta)+isen(\theta))$ e $z' = \rho'(cos(\theta')+isen(\theta'))$ due numeri complessi in forma trigonometrica. L'argomento di
$$\frac{z^2}{2z'}$$
è:

$2\theta - \theta'$; **V** | **F**
$\frac{\theta^2}{2\theta'}$; **V** | **F**
$\theta - \theta'$ **V** | **F**

(14) Sia $z = 1/2 + i\sqrt{3}/2$. Determinare il numero $z^{39} - z^{36}$.

(15) Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni, verificando la correttezza del risultato.
$$z^4 = -1, \qquad z^3 = 1 + i, \qquad z^7 = 1, \qquad z^5 = -1/2 + i\sqrt{3}/2.$$

(16) Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione
$$z^3\overline{z} = 2.$$
(Suggerimento: $\overline{z}$ è uguale a z^{-1} moltiplicato per ...).

(17) Se z è un numero complesso, indichiamo con $|z|$ il suo modulo. Sia ρ la relazione d'equivalenza definita sui numeri complessi da
$$z\rho z' \quad \Leftrightarrow \quad |z| = |z'|.$$
Determinare la classe del numero i ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di ρ su $\mathbb{C}$.

(18) Sia ρ la relazione d'equivalenza definita sui numeri complessi non nulli da

$$z\rho z' \quad \Leftrightarrow \quad Arg(z) = Arg(z')$$

Determinare la classe del numero i ed un insieme di rappresentanti per le classi d'equivalenza di ρ su $\mathbb{C}$.