Esercizi sui determinanti

Domande VERO/FALSO

(1) Se una matrice ha una riga con tutte le cifre uguali ad 0, allora il determinante della matrice è zero; **V** | **F**

(2) se una matrice ha una riga con tutte le cifre uguali ad 1, allora il determinante è uguale ad 1; **V** | **F**

(3) se una matrice quadrata $n \times n$ determinante nullo allora i suoi vettori colonna non generano $\mathbb{R}^n$; **V** | **F**

(4) se una matrice quadrata $n \times n$ determinante non nullo allora i suoi vettori colonna fomano una base di $\mathbb{R}^n$; **V** | **F**

(5) la matrice quadrata $n \times n$ che ha tutti i coefficienti uguali a 1 ha determinante uguale ad 1; **V** | **F**

(6) se due matrici quadrate $n \times n$ hanno determinante uguale a zero, anche la loro somma ha determinante uguale a zero; **V** | **F**

(7) se A è una matrice quadrata e $-A$ la matrice opposta, allora

$$det(-A) = -det(A)$$

V | **F**

(8) la funzione determinante è additiva nel senso seguente: se A, B sono matrici $n \times n$ allora $det(A + B) = det(A) + det(B)$; **V** | **F**

(9) la funzione determinante è omogenea nel senso seguente: se A è una matrice quadrata e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $det(\lambda A) = \lambda det(A)$; **V** | **F**

(10) Se una matrice quadrata ha una diagonale con tutti i coefficienti nulli, allora il determinante è nullo. **V** | **F**

ESERCIZI

(1) Calcolare il determinante delle seguenti matrici (utilizzando le proprietà del determinante per semplificare i calcoli prima di applicare la regola di Laplace).

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Utilizzando solo le proprietà viste a lezione trova i determinanti delle seguenti matrici di vettori colonna:

(a) $A_1 = [2e_1 + e_2, e_2]$;

(b) $A_2 = [e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3]$;

(c) $A_3 = [ae_1, be_1 + ce_2, de_1 + ee_2 + fe_3] = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$;

(d) Generalizzando l'esercizio precedente, calcola il determinante di una matrice $n \times n$ triangolare superiore, cioè una matrice $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,j} = 0$ se $i > j$.

(e) Come sopra ma per matrici triangolari inferiori cioè una matrice $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,j} = 0$ se $i < j$.

(3) Utilizzando solo la funzione determinante stabilisci se i seguenti insiemi ordinati di vettori formano una base dello spazio vettoriale corrispondente.

(a) $(2e_1 + e_2, e_2)$ in $\mathbb{R}^2$;

(b) $(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$ in $\mathbb{R}^3$;

(c) $(e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$ in $\mathbb{R}^3$;

(d) $(ae_1, be_1 + ce_2, de_1 + ee_2 + fe_3)$ in $\mathbb{R}^3$ (la soluzione dipenderà dal fatto che alcuni dei coefficienti siano o meno nulli. . .).

(4) Utilizzando la funzione determinante determinare se il vettore $v = (-1, -5, 1)$ è combinazione lineare dei vettori v_1, v_2, dove $v_1 = (1, -1, 1)$ e $v_2 = (2, 1, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.