Cardinalità di Insiemi

- Quanti elementi contiene l'insieme A?
- L'insieme A contiene più o meno elementi dell'insieme B?

Il concetto di cardinalità (o “numero” di elementi di un insieme) ci è molto familiare se ci restringiamo a insiemi finiti.

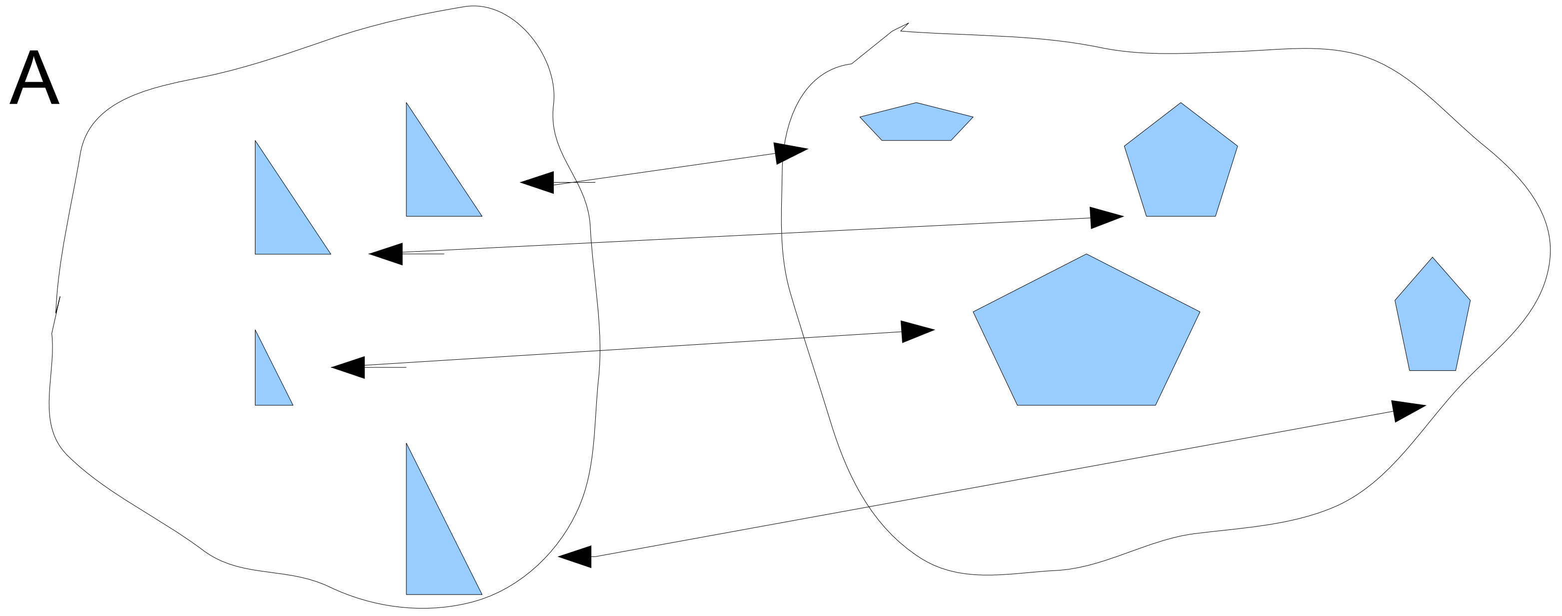
È possibile dare una nozione di cardinalità anche per gli insiemi infiniti?

Confronto fra insiemi finiti

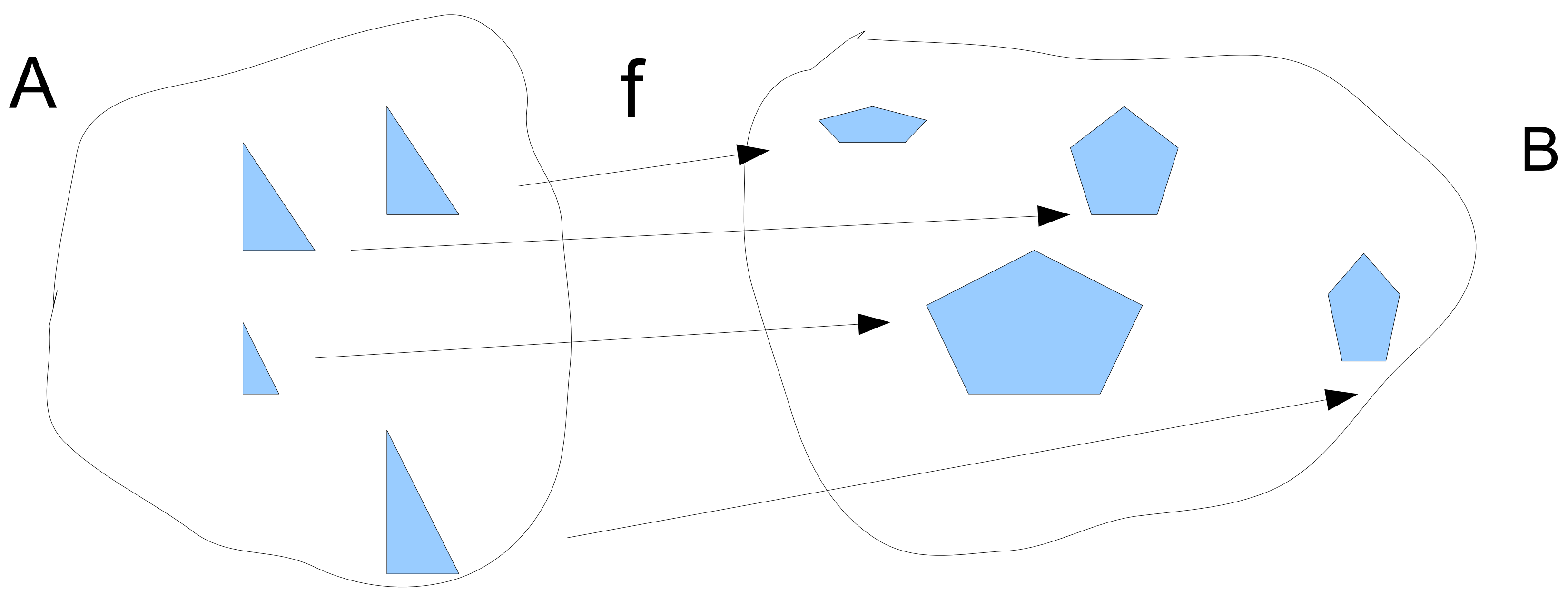
Due insiemi finiti A,B hanno la stessa cardinalità **(|A|=|B|)**

se e solo se

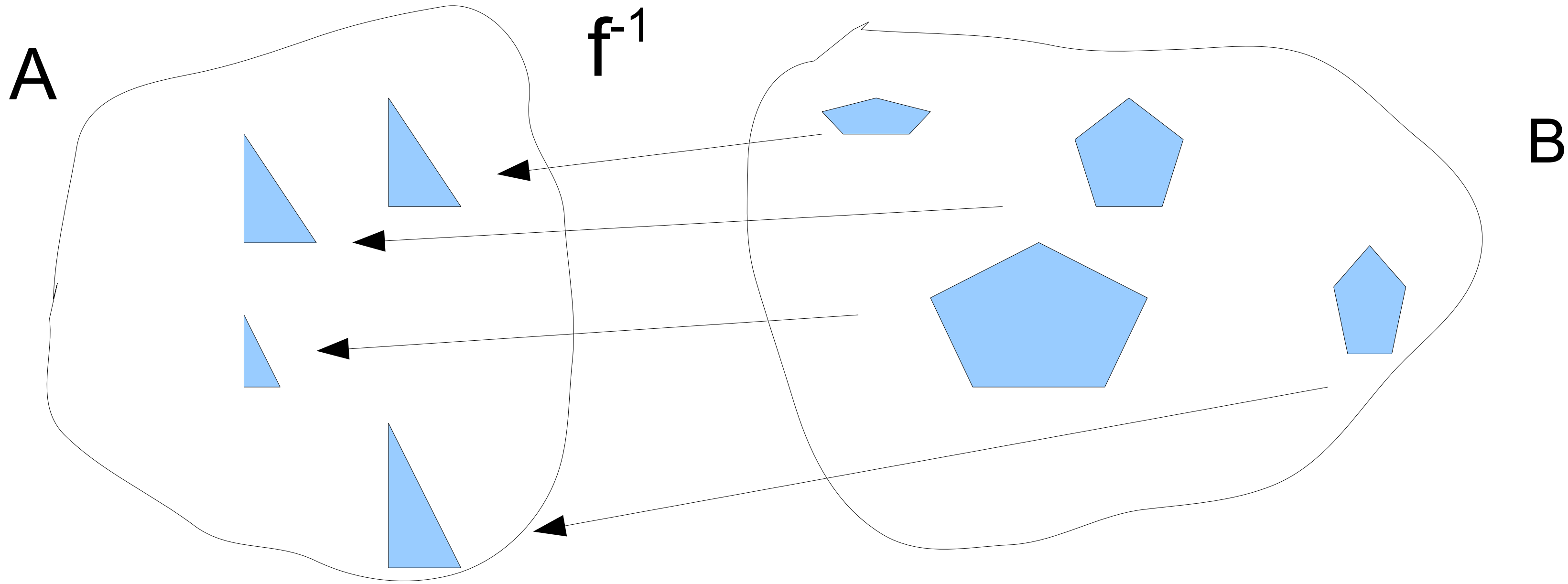
posso appaiare gli elementi di A e di B in modo che nessun elemento rimanga fuori dalle coppie;



in termini matematici questo significa che |A|=|B| se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca f:A --> B



in termini matematici questo significa che |A|=|B| se e solo se esiste una corrispondenza biunivoca f:A --> B



Confronto fra insiemi qualsiasi

Se estendiamo questa definizione al caso di insiemi infiniti troviamo subito qualche difficoltà:

Galileo (1638 “Dialoghi intorno a due nuove scienze”)
I numeri naturali hanno la stesso numero di elementi dei quadrati perfetti

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n ...
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81 ...	n^2 ..

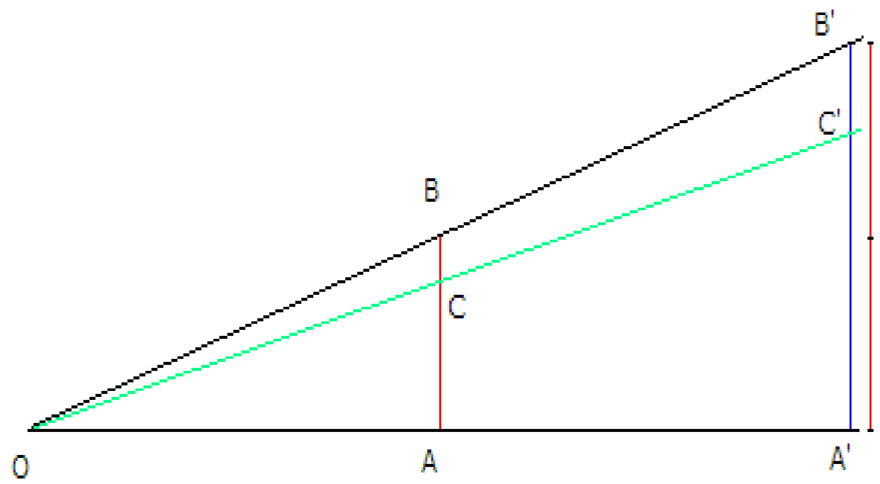
Similmente, l'insieme N ha la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri pari 2N perché la funzione f :N --> 2N definita da f(n)=2n è biunivoca

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	n ...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
0	2	4	6	8	10	12	14	16	18 ...	2n ..

ma N contiene strettamente 2N

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13.....

Un segmento ha la stessa cardinalità di un segmentolungo il doppio

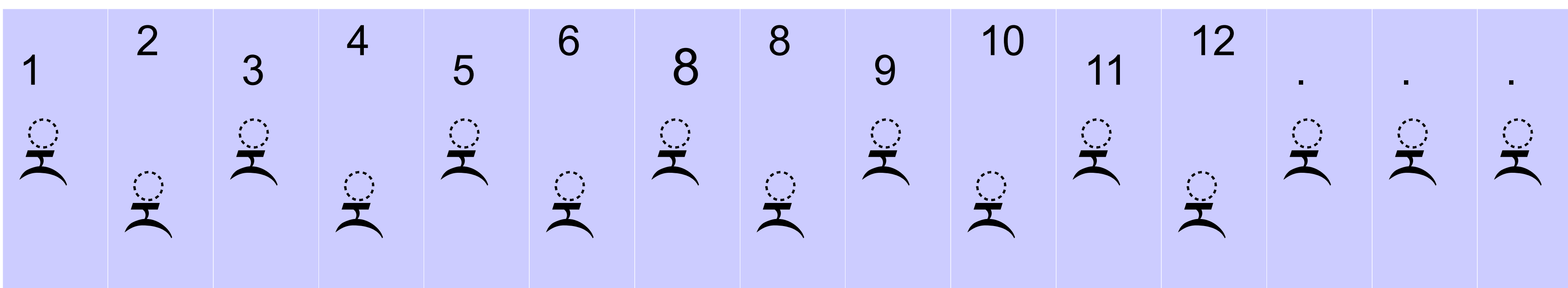


L'albergo di Hilbert

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	.	.	.

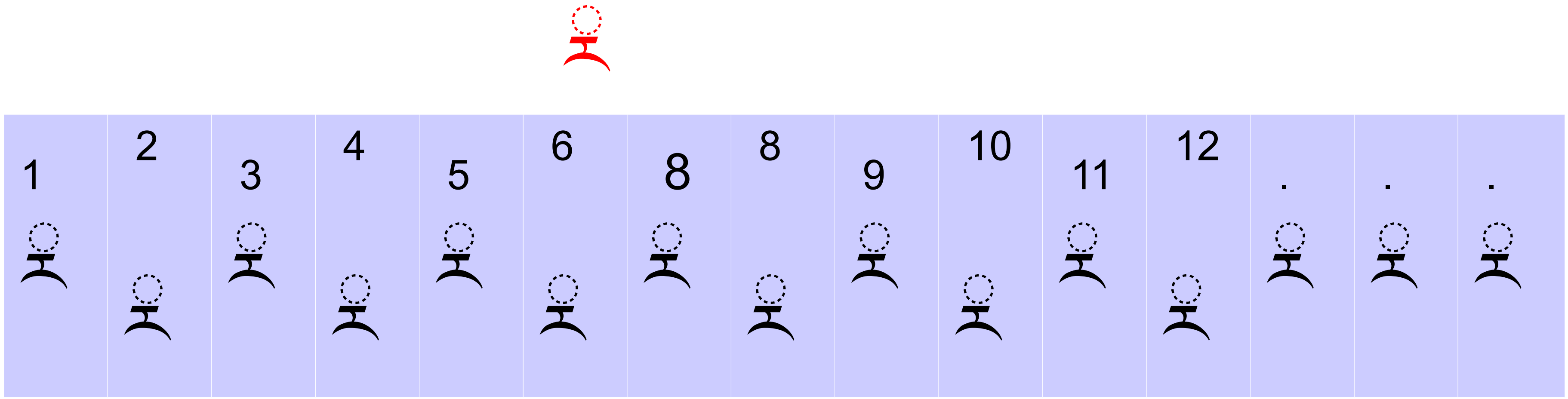
È un albergo con infinite stanze

L'albergo di Hilbert



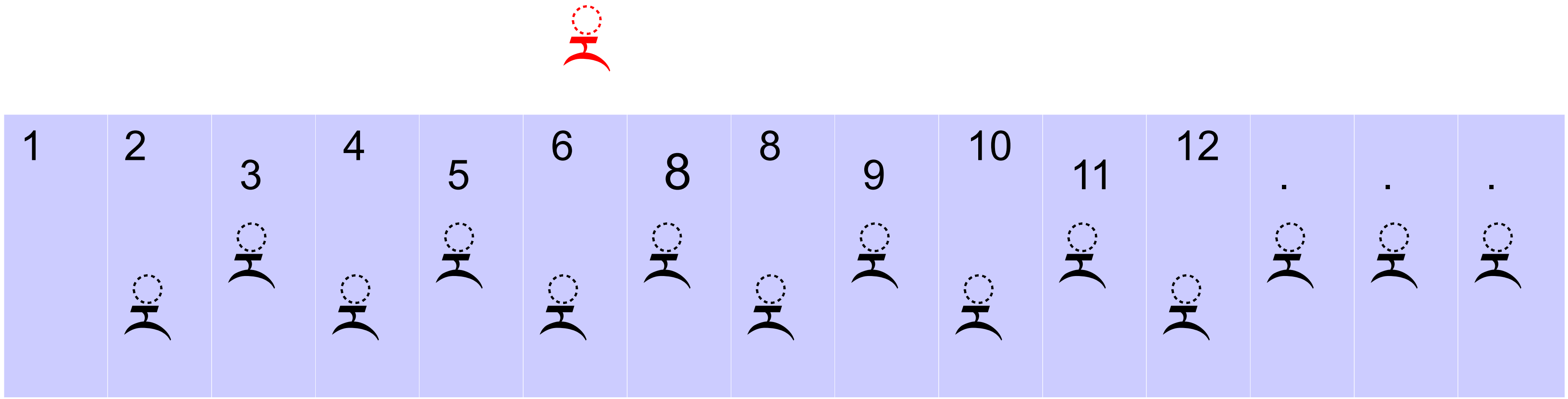
Arrivano infiniti ospiti, che vengono alloggiati in modo da riempire tutte le stanze.

L'albergo di Hilbert



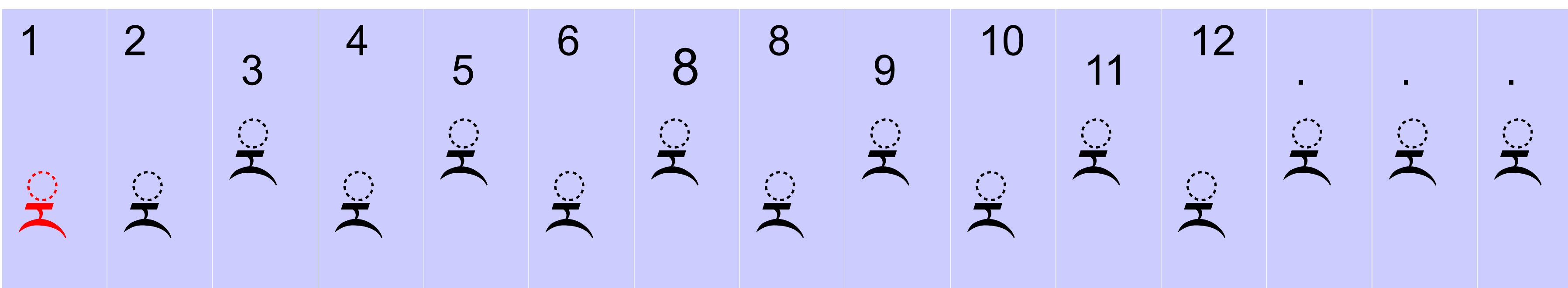
Arriva un nuovo ospite, ma l'albergatore non si scompone

L'albergo di Hilbert



Chiede ad ogni ospite di spostarsi nella camera successiva, liberando così una camera, dove alloggia l'ultimo arrivato..

L'albergo di Hilbert



Chiede ad ogni ospite di spostarsi nella camera successiva, liberando così una camera, dove alloggia l'ultimo arrivato..

Con un po' di fantasia, l'albergatore
potrebbe alloggiare infiniti nuovi ospiti...

Quando trasferiamo la definizione di equinumerosità ad insiemi infiniti, otteniamo delle conseguenze che ci appaiono paradossali.

Per questa ragione quasi tutti i matematici fino al 1900 credevano che non fosse possibile costruire una teoria coerente ed interessante sulla cardinalità di tutti gli insiemi.

Insiemi Numerabili

Un insieme si dice *numerabile* se è finito oppure se ha la stessa cardinalità dell'insieme N dei numeri naturali

Come sono fatti gli insiemi A tale che $|A|=|N|$?

$|A|=|N|$ se e solo se esiste f biunivoca f:N --> A

$N= \{0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , ...\}$

$A =\{a , c , x , u , \& , ? , n, @ , ...\} =$

$\{f(0), f(1),f(2), f(3), f(4), f(5), f(6), f(7),.........\}$

con $f(0)=a$, $f(1)=c$, $f(2)=x$, $f(3)=u$, $f(4)=\&$,....

$|A|=|N|$ se posso
enumerare A, cioè se posso costruire una successione

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots.$$

senza ripetizioni e in modo da esaurire tutto l'insieme A

in questo modo una possibile funzione biunivoca
$f : N \dashrightarrow A$ che dimostra $|N|=|A|$ è $f(i)=a_i$

Ad esempio, $|Z|=|N|$ perché possiamo elencare Z su due righe infinite, come illustrato qui sotto e poi costruire un unico elenco passando dalla prima alla seconda riga e viceversa:

0 , 1 , 2 , 3 ,4 , 5 , 6 , 7 , ...

-1 , -2 , -3 , -4 , -5 , -6 , -7,

$|A|=|N|$ se posso

enumerare A, cioè se posso costruire una successione

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots.$$

senza ripetizioni e in modo da esaurire tutto l'insieme A

in questo modo una possibile funzione biunivoca

$f : N \dashrightarrow A$ che dimostra $|N|=|A|$ è $f(i)=a_i$

Ad esempio, $|Z|=|N|$ perché possiamo elencare Z su due righe infinite, come illustrato qui sotto e poi costruire un unico elenco passando dalla prima alla seconda riga e viceversa:

0 , 1 , 2 , 3 ,4 , 5 , 6 , 7 , ...

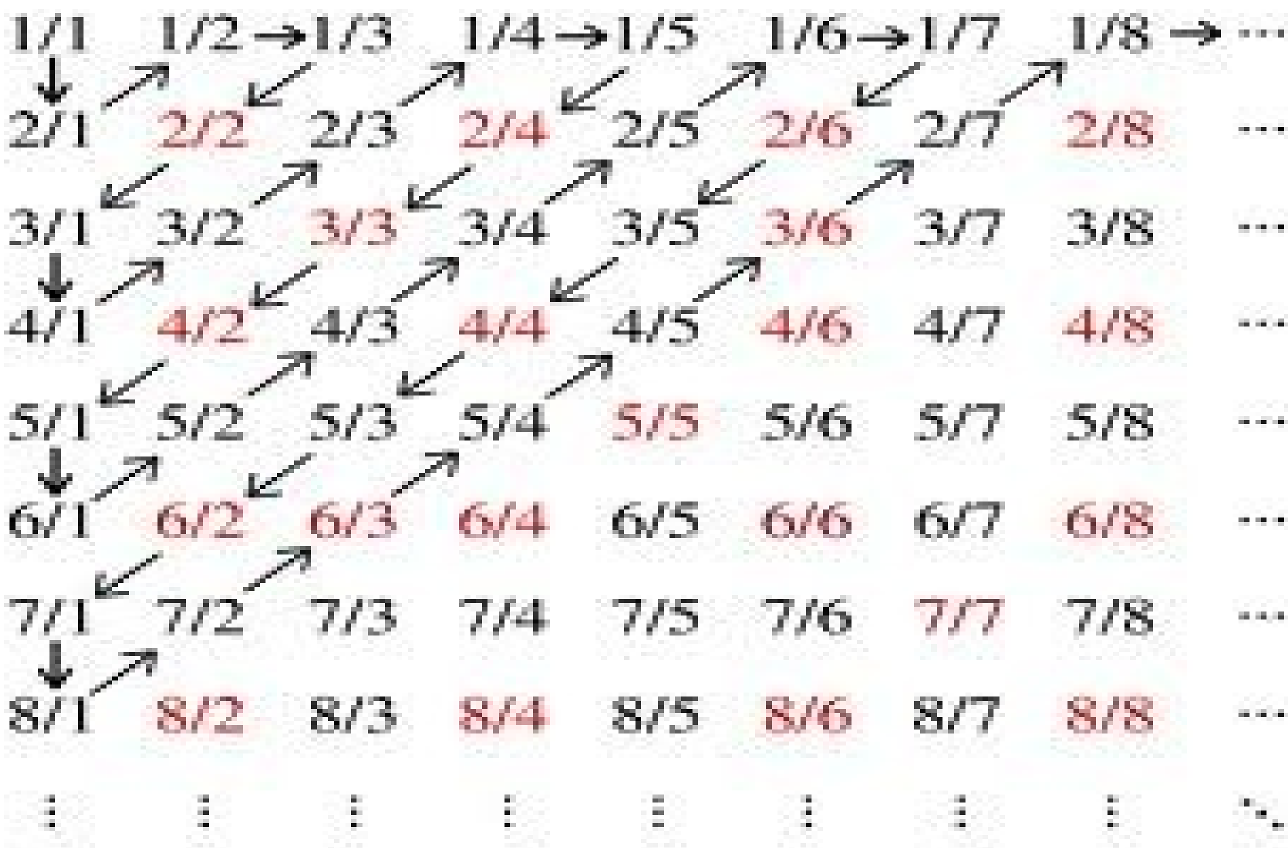
-1 , -2 , -3 , -4 , -5 , -6 , -7,

Cosa possiamo dire dei numeri razionali Q?

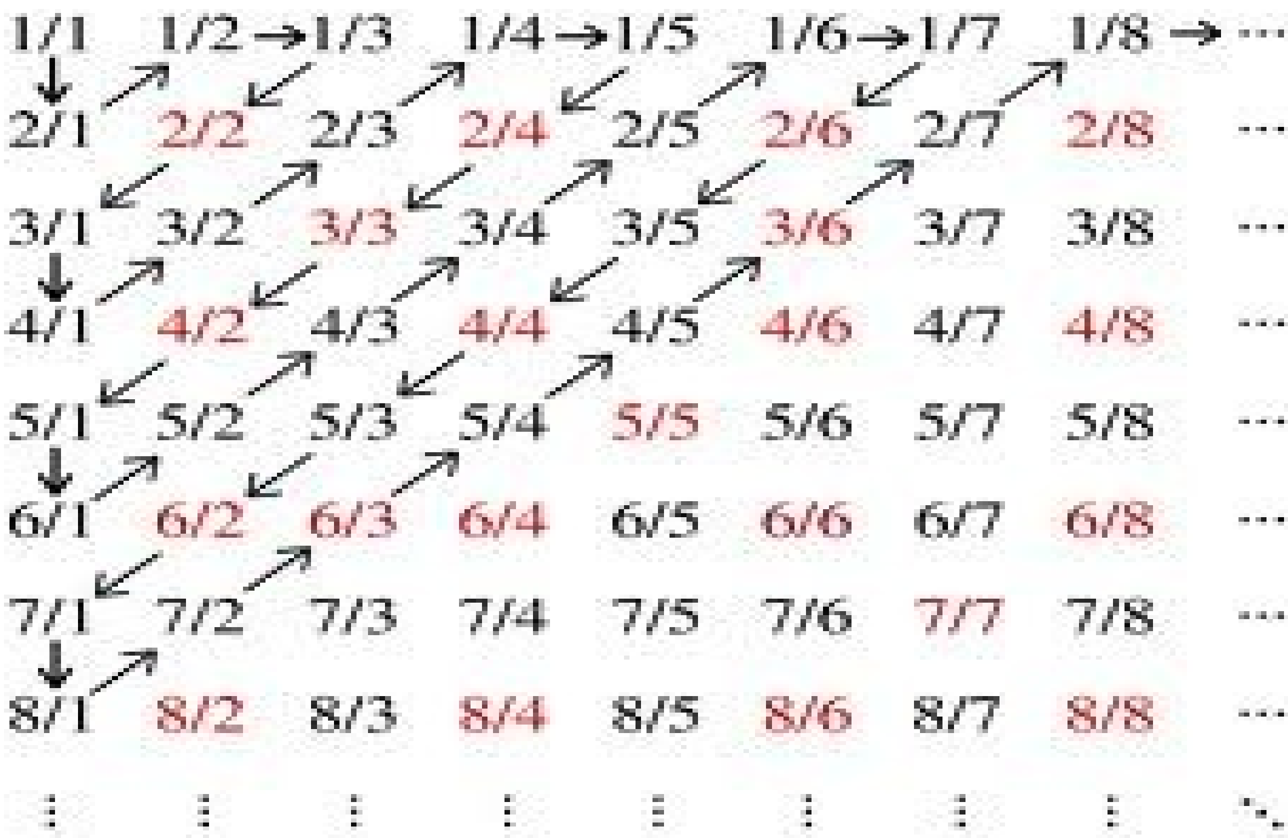
Questi numeri, al contrario di Z, sono densi sulla retta e sembrano molti di più dei numeri naturali.

Esiste una funzione biunivoca da N a Q?

Limitiamoci per il momento ai razionali positivi Q^+



Limitiamoci per il momento ai razionali positivi Q^+



1/1, 2/1, 1/2. 1/3, 3/1, 4/1, 3/2, 2/3, , 1/4, 1/5, 5/1, ...

Anche se l'ordine di enumerazione non è quello usuale, questa sequenza prova che $|N|=|Q^+|$

Per passare da Q^+ a Q notiamo che se $|A|=|N|$ e $B=\{0,1\}$ allora $|A \times B|= |N|$

Infatti

Infatti $A=\{ a_0,a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...\}$

e

$$AxB=\{(a_0,0)\ (a_1,0)\ (a_2,0)\ (a_3,0)\ (a_4,0)\ (a_5,0)\ (a_6,0)....\}$$

$$\cup$$

$$\{(a_0,1)\ (a_1,1)\ (a_2,1)\ (a_3,1)\ (a_4,1)\ (a_5,1)\ (a_6,1)......\}$$

Possiamo enumerare AxB saltando dalla prima alla seconda riga, come abbiamo fatto con Z:

$$(a_0,0),\ (a_0,1),\ (a_1,0),\ (a_1,1),\ (a_2,0),\ (a_2,1),\ .....,$$

Per passare da Q^+ a Q notiamo che se $|A|=|N|$ e $B=\{0,1\}$ allora $|A \times B|= |N|$

Infatti

Infatti $A=\{ a_0,a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...\}$

e

$$AxB=\{(a_0,0)\ (a_1,0)\ (a_2,0)\ (a_3,0)\ (a_4,0)\ (a_5,0)\ (a_6,0)....\}$$

$$\cup$$

$$\{(a_0,1)\ (a_1,1)\ (a_2,1)\ (a_3,1)\ (a_4,1)\ (a_5,1)\ (a_6,1)......\}$$

Possiamo enumerare AxB saltando dalla prima alla seconda riga, come abbiamo fatto con Z:

$(a_0,0)$, $(a_0,1)$, $(a_1,0)$, $(a_1,1)$, $(a_2,0)$, $(a_2,1)$, ...,

Se $C = B \cup A$ con B insieme finito $|A|=|N|$ allora
$|C|=|N|$

$$C=\{ b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n\} \cup \{ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\ldots\}$$
$$= \{ c_0, c_1, c_2, \ldots\ldots, c_n, c_{n+1}\ c_{n+2}\ c_{n+3} \ldots\ldots\}$$

Più in generale, se B è finito e A è infinito , allora
$|B \cup A| = |A|$

In particolare:

$|N| = |Q^+| = |Q^+ x\{0,1\}| = |Q\setminus\{0\}| = |Q|$

dove = vale perché la funzione

$$\mathbf{f : Q^+ x\{0,1\} \dashrightarrow Q\setminus \{0\}}$$

definita da $f(q,0)=q$ e $f(q,1)= -q$

è biunivoca.

Esempi di insiemi A con $|A|=|N|$

- N, Z, Q;
- NxN ;

e, più in generale, $A=BxC$ se $|B|=|N|$, $|C|\leqq|N|$;

- $A= A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ se $|A_i|$ è finito oppure $|A_i| =|N|$ (a meno che non sia un insieme finito)
- A=stringhe finite di {0,1};

infatti A= { 0 ,1,
00, 01, 10, 11
000, 001, 010, 100, 011,110, 101, 111
0000, 0001, ...
...}

e , più in generale, A =successioni finite di un insieme finito;

- A= sottoinsiemi finiti di un insieme B con $|B|=|N|$

Tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità?

NO: se consideriamo A= successioni infinite di {0,1}
(ad esempio a= 01010101010101010 ... appartiene ad A)

allora $|A| \neq |N|$
Se esistesse una enumerazione
$A=a_0 , a_1 , a_2 , a_3 , \ldots\ldots$

potrei formare un “quadrato” infinito

$$a_0 = a_{0\,0}\ a_{0\,1}\ a_{0\,2}\, a_{0\,3}\, a_{0\,4}\, a_{0\,5}\, a_{0\,6}\, a_{0\,7} \ldots.$$
$$a_1 = a_{1\,0}\ a_{1\,1}\ a_{1\,2}\, a_{1\,3}\, a_{1\,4}\, a_{1\,5}\, a_{16}\, a_{1\,7} \ldots.$$
$$a_2 = a_{20}\ a_{21}\ a_{2\,2}\, a_{2\,3}\, a_{24}\, a_{25}\, a_{26}\, a_{2\,7} \ldots.$$

....

Per trovare una successione di 0 e 1 che non è nella lista:

$b = b_0\ b_1\ b_2\ b_3$, ... basta scegliere $b_i \neq \mathbf{a_{i\,i}}$

$$a_0 = a_{0\,0}\ a_{0\,1}\ a_{0\,2}\ a_{0\,3}\ a_{0\,4}\ a_{0\,5}\ a_{06}\ a_{07} \ldots$$

$$a_1 = a_{1\,0}\ a_{1\,1}\ a_{1\,2}\ a_{1\,3}\ a_{1\,4}\ a_{1\,5}\ a_{16}\ a_{17} \ldots$$

$$a_2 = a_{20}\ a_{21}\ a_{2\,2}\ a_{2\,3}\ a_{24}\ a_{25}\ a_{26}\ a_{27} \ldots$$

::::::::::

$$a_i = a_{i0}\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots \ldots a_{ii}\ a_{ii+1} \ldots$$

....

$|R| \neq |N|$

usando una tabella con righe date dall'espansione decimale del numero reale.

Cardinalità del continuo c

La cardinalità di R è detta “cardinalità del continuo”.
Si dimostra che |R|=|RxR|=|C|
Quindi, ci sono tanti punti sulla retta quanti ce ne sono sul piano!

Quante cardinalità infinite esistono?

$|A|<|B| \Leftrightarrow |A| \neq |B|$ ma esiste f iniettiva da A a B;

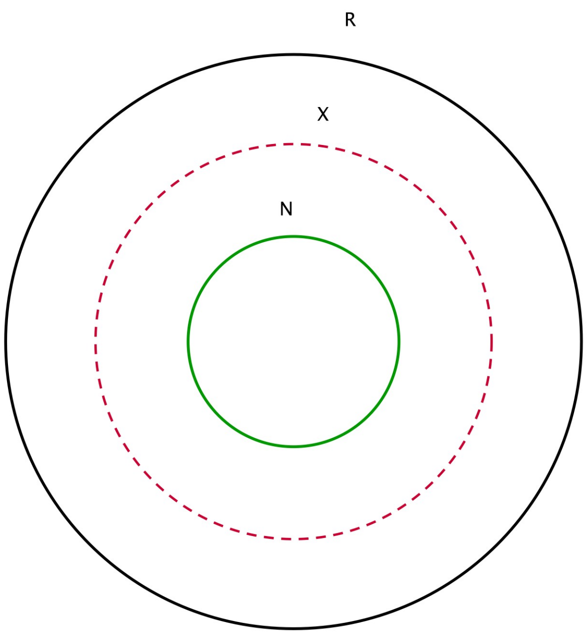
Se A è un insieme (finito o infinito) allora

$|A| < |Pow(A)|$

dove $Pow(A)=\{B : B \subseteq A\}$

$A < Pow(A) < Pow(Pow(A)) < Pow(Pow(Pow(A))) < ...$

Un problema difficile



N è un sottoinsieme proprio di R e inoltre

$$|N| < |R|$$

Esistono insiemi X con $N \subset X \subset R$ e

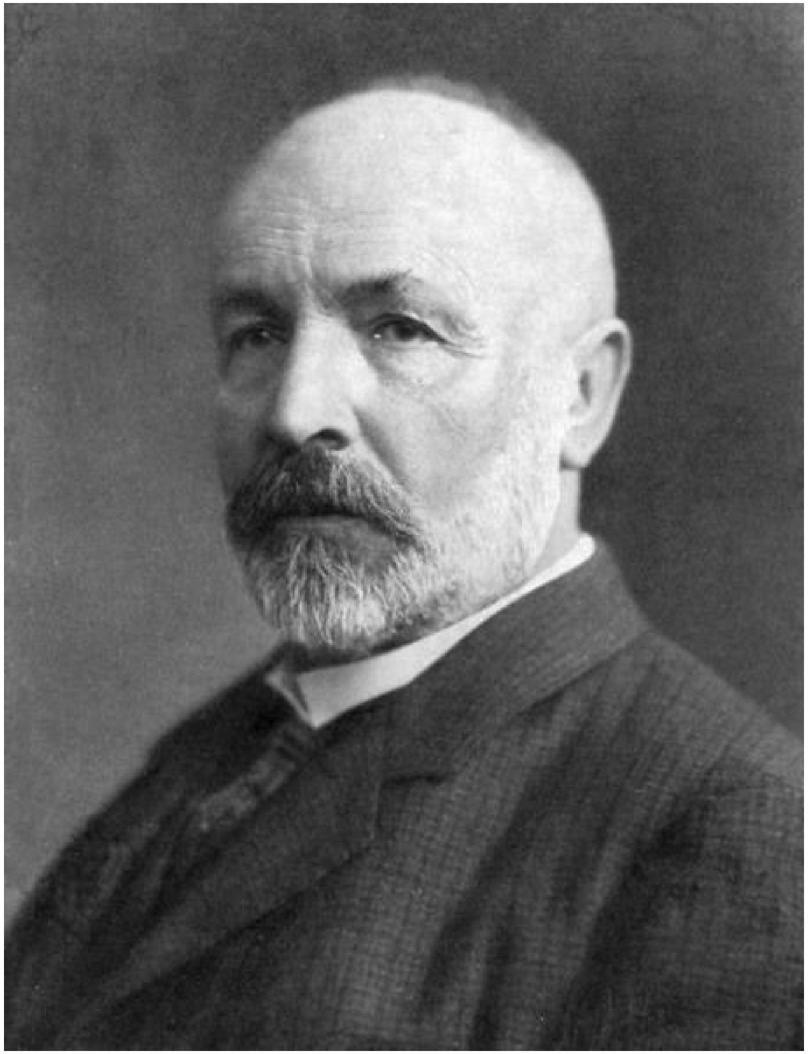
$$|N| \neq |X| \neq |R|?$$

In altre parole, esistono insiemi di cardinalità intermedie fra
|N| e |R|, oppure c è la cardinalità che viene subito dopo |N|?

“L'ipotesi del continuo” : non esistono altre cardinalità fra |N| e la cardinalità di |R|

(|R| viene chiamata anche “cardinalità del continuo”)

Georg Cantor (1845-1918)



Padre della teoria delle cardinalità, tentò inutilmente di dimostrare l'ipotesi del continuo.

Grazie al lavoro di Cantor, Goedel e Cohen, oggi sappiamo di non sapere ancora abbastanza sugli insiemi per derimere questo problema!