Esercizi MD FOGLIO 4

DIPENDENZA E BASI

(1) (a) Considera i vettori $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,-1,3), v_3 = (3,0,0)$ in $\mathbb{R}^3$ e la matrice A che ha per righe le coordinate dei vettori v_1, v_2, v_3. Utilizzando le trasformazioni elementari per righe sulla matrice A, determina se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Determina inoltre una base di $L(v_1, v_2, v_3)$.

(b) Considera i vettori $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,-1,3), v_3 = (3,0,5)$ in $\mathbb{R}^3$ e la matrice A che ha per righe le coordinate dei vettori v_1, v_2, v_3. Utilizzando le trasformazioni elementari per righe sulla matrice A, determina se i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente dipendenti. Determina inoltre una base di $L(v_1, v_2, v_3)$.

(c) Considera i vettori $v_1 = (1,1,1), v_2 = (2,-1,3)$ e, fissato un numero reale r, il vettore $v_r = (3,0,r)$. Sia A la matrice che ha per righe le coordinate dei vettori v_1, v_2, v_r. Utilizzando le trasformazioni elementari per righe sulla matrice A, determina per quali valori di r i vettori sono linearmente dipendenti. Per questi valori di r determina una base di $L(v_1, v_2, v_r)$.
[risposta $r = 4$]

(2) (a) Considera i vettori $v_1 = (1,3,2), v_2 = (-2,1,1)$ e, fissato un numero reale t, il vettore $v_t = (t,0,-1)$. Sia A la matrice che ha per righe le coordinate dei vettori v_1, v_2, v_t. Utilizzando le trasformazioni elementari per righe sulla matrice A, determina per quali valori di t il vettore v_t è combinazione lineare di v_1, v_2. Per questi valori di t, determina λ_1, λ_2 tali che $v_t = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$.
[risposta $t = 7$, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$]

(3) Dati i vettori $v_1 = (1,-1,0,1), v_2 = (2,1,1,0), v_3 = (3,0,1,1)$, $v_4 = (0,1,-1,0)$ trova una base per $L(v_1, v_2, v_3, v_4)$ utilizzando le trasformazioni elementari per riga come nei precedenti esercizi.

(4) Sia $W = \{(x,y,z) : x + y = 0\}$.

(a) Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

(b) È possibile trovare tre vettori linearmente indipendenti in W?

(c) Trova due vettori linearmente indipendenti in W.

(d) Trova una base di W e la sua dimensione come spazio vettoriale; W è una retta dello spazio oppure un piano? Danne una rappresentazione grafica.

(e) Dati i vettori $v_1 = (1,1,1), v_2 = (0,0,1)$ considera il sottospazio $L(v_1, v_2)$ e determina la sua dimensione come spazio vettoriale; $L(v_1, v_2)$ è una retta dello spazio oppure un piano? Danne una rappresentazione grafica.

(f) Trova un vettore v che stia in $L(v_1, v_2)$ ma non in W, un vettore W che stia in W ma non in $L(v_1, v_2)$ ed un vettore v' che stia in entranbi i sottospazi.

(g) Determina l'intersezione $W \cap L(v_1, v_2)$ (che è ancor un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$), determinando la sua dimensione e dandone una rappresentazione grafica.

MATRICI

(5) Siano A, B, C le seguente matrici, a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(nota: la matrice ${}^tB$ indica la trasposta della matice B, cioè la matrice ottenuta da B scambiando le righe con le colonne)
Quando possibile, calcola le espressioni sottoindicate.
Se non è possibile calcolarle, spiega il perché.
(a) $-2(A+B)C$;
(b) $-2C(A+B)$;
(c) $(A +^t B)^2$;
(d) $(A^tB)^2 - AC$.

(6) Considera il prodotto Av fra la matrice A dell'esercizio 5) e il vettore colonna ${}^tv$ dove $v = (1,1,0)$. Calcola Av utilizzando la definizione del prodotto fra matrici. Ricordando quanto visto a lezione, esprimi il vettore Av come combinazione lineare delle colonne di A.
Svolgi lo stesso esercizio se v è il vettore colonna $v =^t (2,1,1)$.

(7) Sia v il vettore colonna ${}^t(-1,1,0)$. Se la matrice E di dimensioni 5×3 ha la prima e la seconda colonna uguali, calcola il vettore colonna Ev).

(8) Sia $A_{n\times m}$ una matrice con colonne $A^1, \dots A^m$. Per ognuna delle matrici D descritte sotto, determinare il numero di colonne della matrice AD e determinare tali colonne.
(a) D è la matrice colonna $m \times 1$ con tutti i coefficienti uguali a 1;
(b) D è la matrice colonna $m \times 1$ con tutti i coefficienti uguali a k per un fissato $k \in \mathbb{R}$;
(c) D è la matrice quadrata $m \times m$ definita da

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } & i \neq j \\ i \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(d) D è la matrice quadrata $m \times m$ con tutti i coefficienti uguali a 1;
(e) D è la matrice quadrata $m \times m$ con tutti i coefficienti uguali a k per un fissato $k \in \mathbb{R}$.