

(1) Considerare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

- (a) Determinare il sottospazio affine delle soluzioni del sistema. Questo insieme è anche un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 ?
- (b) Determinare la dimensione dello spazio affine di cui al punto precedente.

SOL la matrice completa del sistema si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

con un'unica soluzione $x = 7/6, y = -8/6, z = 5/6$ Quindi lo spazio affine delle soluzioni ha dimensione 0.

(2) Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il rango della matrice A . I vettori riga della matrice sono linearmente indipendenti? Qual è la dimensione del sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^3 generato dalle righe di A ?
- (b) Considerato il sistema non omogeneo

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinarne l'insieme delle soluzioni e la sua dimensione.

- (c) Determinare se l'insieme delle soluzioni è un punto, una retta oppure un piano e le sue equazioni parametriche.

SOL: l'insieme delle soluzioni del sistema è

$$\{(1 - t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

L'insieme delle soluzioni è quindi una retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x & = & 1 - t \\ y & = & 0 \\ z & = & t \end{cases}$$

(3) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 8y - 5z = 2 \\ x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

- (a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa del sistema;
- (b) determinare se il sistema ammette soluzioni; in caso affermativo descrivere lo spazio affine delle soluzioni;
- (c) se il sistema ammette soluzioni, determinare se l'insieme delle soluzioni è un punto, una retta oppure un piano e le sue equazioni parametriche.

SOL $Sol(Ab) = \{-2/3 - (1/3)h, 1/3 + (2/3)h, h\} : t \in \mathbb{R}$
l'insieme delle soluzioni è una retta di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x & = -2/3 - (1/3)h \\ y & = 1/3 + (2/3)h \\ z & = h \end{cases}$$

(4) Considerare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 2x_5 = -4 \\ + 2x_3 - 8x_4 - 1x_5 = 3 \\ - 8x_4 - 1x_5 = 7 \end{cases}$$

- (a) Determinare il sottospazio affine delle soluzioni del sistema.
- (b) Determinare la dimensione dello spazio affine di cui al punto precedente.
- (c) Trovare l'insieme delle soluzioni $Sol(A)$ del sistema omogeneo associato ed una sua base.
- (d) Descrivere le soluzioni del sistema iniziale come somma di una soluzione particolare e di $Sol(A)$.

SOL $Sol(Ab) = \{(-6h - 3k, h, 5 + 4k, k, 7) : h, k \in \mathbb{R}\}$