Domande VERO/FALSO

(1) Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è definita da $F(x, y, z) = (2x - y, z)$ allora $dim(Im(F)) = 2$; **V** | **F**

(2) se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è definita da $F(x, y) = (y, x)$, allora $dim(Im(F)) = 1$ e $dim(Ker(F)) = 1$; **V** | **F**

(3) la dimensione dello spazio affine delle soluzioni di un sistema non omogeneo è sempre strettamente maggiore della dimensione dello spazio vettoriale delle soluzioni del sistema omogeneo associato; **V** | **F**

(4) l'insieme delle le soluzioni $Sol(A, b)$ di un sistema è il nucleo della trasformazione lineare che corrisponde alla matrice A; **V** | **F**

(5) l'insieme delle le soluzioni $Sol(A, b)$ di un sistema è l'immagine della trasformazione lineare che corrisponde alla matrice A; **V** | **F**

(6) l'insieme delle le soluzioni $Sol(A, b)$ di un sistema è la controimmagine del vettore b rispetto alla trasformazione lineare che corrisponde alla matrice A; **V** | **F**

(7) il rango di una matrice A è uguale alla dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema omogeneo $A\vec{x} = \vec{0}$ associato ad A; **V** | **F**

(8) se un sistema ha n incognite e m equazioni con $m > n$ allora non ha soluzione; **V** | **F**

(9) esistono sistemi lineari a coefficienti in $\mathbb{R}$ che hanno due possibili soluzioni; **V** | **F**

(10) se un sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ a coefficienti in $\mathbb{R}$ ha una soluzione non nulla, allora ne ha infinite. **V** | **F**

Esercizî

(1) Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

e sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare tale che $A = M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_2}(F)$.

(a) Trova la dimensione degli spazi vettoriali $Im(F), Ker(F)$.

(b) Trova una base per il sottospazio vettoriale $Im(F)$ (sottospazio di R^2).

(c) Calcola il rango della matrice A dei coefficienti ed il rango della matrice orlata

$$[A, b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

dove

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

è la colonna dei termini noti del sistema.

(d) Verifica che il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha soluzione, confrontando il rango della matrice A dei coefficienti con il rango della matrice orlata.

(e) Determina la dimensione dello spazio affine delle soluzioni $Sol(A, b)$ del sistema, stabilendo se è un punto, una retta oppure un piano di $\mathbb{R}^3$.

(f) Determina lo spazio vettoriale costituito dalle soluzioni del sistema omogeneo $Sol(A)$ (suggerimento: sostituisci la variabile z del sistema con un parametro $k \in \mathbb{R}$; ad ogni valore di k corrisponderà una soluzione del sistema omogeneo).

(g) Verificato che $(1, 0, 0)$ è una soluzione del sistema non omogeneo, descrivi $Sol(A, b) = Sol(A) + (1, 0, 0)$.

(**Soluzioni** $dim(Im(L_A)) = 2, dim(Ker(L_A)) = 1$, $Sol(A, b)$ è una retta di $\mathbb{R}^3$, $Sol(A) = \{(-k, -(3/2)k, k) : k \in \mathbb{R}\}$
$Sol(A, b) = \{(1 - k, -3/2k, k) : k \in \mathbb{R}\}$.

(2) Per ognuno dei sistemi lineari seguenti, determina se il sistema ammette soluzione confrontando il rango della matrice dei coefficienti con ilrango della matrice orlata. Per tutti i sistemi che hanno soluzione, determina la dimensione dello spazio vettoriale $Sol(A)$ dato dalle soluzioni del sistema omogeneo e descrivi tale spazio. Determina poi la dimensione dello spazio affine $Sol(A, b)$ e descrivi esplicitamente lo spazio affine delle soluzioni come somma dello spazio vettoriale $Sol(A)$ e di una soluzione particolare del sistema non omogeneo.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

(non ha soluzioni)

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ & & 6x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & & & x_3 & = & -1 \end{cases}$$

$(dim(Sol(Ab)) = 0$, il sistema ha un'unica soluzione $(-1/2, 1/2, -1)))$.

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -1 \end{cases}$$

(Suggerimento per trovare $Sol(A)$: sostituisci le variabili x_3, x_4 del sistema con i paramentri $h, k \in \mathbb{R}$, rispettivamente; ad ogni coppia di valori dei parametri corrisponderà una soluzione del sistema omogeneo)
$(dim(Sol(A, b) = 2$; $Sol(A) = \{(0, -(h+k), k, h) : k, h \in \mathbb{R}\}$; una possibile soluzione del sistema non omogeneo è $(2, -1, 0, 0)$ (ma anche altre scelte sono possibili);
$Sol(A, b) = \{(2, -1-(h+k), k, h) : k, h \in \mathbb{R}\}$ (ma anche altre descrizioni sono possibili))