COGNOME | NOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

SIMULAZIONE SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE

Per ottenere la sufficienza bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 7 domande della parte V/F e risolvere correttamente due esercizi della seconda parte. Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 3 ore.

Domande VERO/FALSO

(1) Se $v_1, \ldots, v_k$ sono vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ e $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare, allora $F(v_1), \ldots, F(v_k)$ sono vettori indipendenti in $\mathbb{R}^m$; **V** | **F** **F**

(2) se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è definita da $F(x, y) = (y, x)$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ allora $dim(Im(F)) = 1$; **V** | **F** **F**

(3) se i vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti, allora ogni loro sottoinsieme è ancora un insieme di vettori dipendenti ; **V** | **F** **F**

(4) se W è un sottospazio di uno spazio vettoriale e $v + v' \in W$ allora $v, v' \in W$; **V** | **F** **F**

(5) se $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ allora $W^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x = -y\}$; **V** | **F** **V**

(6) una matrice quadrata invertibile non può avere autovalore 0; **V** | **F** **V**

(7) se W è un sottospazio di uno spazio vettoriale V, $W = L(v_1, \ldots, v_k)$ e $v \in W$ allora $W = L(v_1, \ldots v_k, v)$; **V** | **F** **V**

(8) se A è una matrice quadrata invertibile allora $det(A) = -det(A^{-1})$; **V** | **F** **F**

(9) una matrice diagonale è sempre invertibile; **V** | **F** **F**

(10) $rg(I_n) = 1$ dove I_n è la matrice identità. **V** | **F** **F**

Esercizi

(1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codominio, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di F sul generico vettore (x, y, z) del dominio.
(b) Determinare la dimensione dell'immagine $Im(F)$ di F e la dimensione del nucleo $Ker(F)$ di F.
(c) Determinare una base per l'immagine di F e, se possibile, un vettore che non appartiene a tale immagine. La funzione F è suriettiva?

(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (y, x, z).$$

(a) Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica per dominio e codominio.
(b) Determinare gli autovalori di F e la loro molteplicità algebrica.
(c) Per ogni autovalore, determinare il relativo autospazio e la sua dimensione.
(d) Determinare se F è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per F.

(3) Sia dato il sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 4y + 3z = 3 \\ 3x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa del sistema;
(b) determinare se il sistema ammette soluzioni; in caso affermativo descrivere lo spazio affine delle soluzioni;
(c) se il sistema ammette soluzioni, determinare se l'insieme delle soluzioni è un punto, una retta oppure un piano e le sue equazioni parametriche.

(4) Dare la definizione di rango di una matrice A e discutere la seguente affermazione

se $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \neq 0$ *allora* $rg(A) = rg(\lambda A)$

dimostrandola o fornendo un controesempio.

Soluzioni

(1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codominio, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di F sul generico vettore (x, y, z) del dominio. Il vettore $F(x, y, z)$ è il trasposto di

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x+z \\ -x+y \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare la dimensione dell'immagine $Im(F)$ di F e la dimensione del nucleo $Ker(F)$ di F.
Si ha

$$Ker(F) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)\} =$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (y, x+z, -x+y, 0) = (0, 0, 0, 0)\} =$$

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0, y = 0, z = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Ne segue che $dim(Ker(F)) = 0$ e dall'equazione $3 = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$ abbiamo $dim(Im(F)) = 3$.

(c) Determinare una base per l'immagine di F e, se possibile, un vettore che non appartiene a tale immagine. La funzione F è suriettiva?
Per trovare una base di $Im(F)$ è sufficiente trovare 3 vettori indipendenti che vi appartengono, ad esempio le tre colonne della matrice A.
F non è suriettiva, perché $Im(F)$ ha dimensione 3 e il codominio ha dimensione 4. Un vettore che non appartiene all'immagine è, ad esempio, $w = (0, 0, 0, 1)$.

(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (y, x, z)$$

(a) Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica per dominio e codominio.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Determinare gli autovalori di F e la loro molteplicità algebrica.

$$p(\lambda) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) =$$

$$(1-\lambda)(\lambda - 1)(\lambda + 1) = -(1-\lambda)^2(\lambda + 1)$$

F ha quindi due autovalori, $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica pari a 2 e $\lambda_2 = -1$ di molteplicità algebrica pari a 1.

(c) Per ogni autovalore, determinare il relativo autospazio e la sua dimensione.
V_{λ_1} è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

per cui l'autospazio $V_{\lambda_1} = \{(k, k, h) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 2.
V_{λ_2} è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \\ 2z=0 \end{cases}$$

per cui l'autospazio $V_{\lambda_2} = \{(k, -k, 0) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 (questo si poteva anche prevedere, visto che la dimensione algbrica di questo autovalore è 1).

(d) Determinare se F è diagonalizzabile.
F è diagonalizzabile perché il polinomio caratteristico si spezza completamente e la molteplicità algebrica degli autovalori è pari alla loro molteplicità geometrica (questo era d'altronde prevedibile, visto che la matrice A è simmetrica).

(3) Sia dato il sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 4y + 3z = 3 \\ 3x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa del sistema;
(b) determinare se il sistema ammette soluzioni; in caso affermativo descrivere lo spazio affine delle soluzioni;
(c) se il sistema ammette soluzioni, determinare se l'insieme delle soluzioni è un punto, una retta oppure un piano e le sue equazioni parametriche e cartesiane

La matrice completa del sistema si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi le soluzioni sono date da tutte le terne del tipo $(-6-2k, k, 5)$ dove $k \in \mathbb{R}$.

Le soluzioni del sistema formano quindi quindi una retta r di equazione parametrica

$$\begin{cases} x = -6-2k \\ y = k \\ z = 5 \end{cases}$$

Possiamo ottenere l'equazione cartesiana di r intersecando il piano $z = 5$ con il piano di equazione

$$\begin{cases} x = -6-2k \\ y = k \\ z = h \end{cases}$$

Si vede facilmente che quest'ultimo ha equazione cartesiana $x+2y = -6$. In definitiva, l'equazione cartesiana della retta r è data dal sistema

$$\begin{cases} x+2y = -6 \\ z = 5 \end{cases}$$

(4) Dare la definizione di rango di una matrice A e discutere la seguente affermazione

se $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $\lambda \neq 0$ *allora* $rg(A) = rg(\lambda A)$

dimostrandola o fornendo un controesempio.

L'i-esima colonna della matrice λA è uguale a λc_i dove c_i è l'i-esima colonna di A.

Presi k vettori $v_1, \ldots, v_k$ e $\lambda \neq 0$ si vede facilmente che $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti se e solo se $\lambda v_1, \ldots, \lambda v_k$ sono indipendenti:

($\Rightarrow$) se $v_1, \ldots, v_k$ sono indipendenti e $\lambda_1 \lambda v_1 + \ldots, \lambda_k \lambda v_k = \vec{0}$ allora $\lambda(\lambda_1 v_1 + \ldots, \lambda_k v_k) = \vec{0}$ e quindi $\lambda_1 v_1 + \ldots, \lambda_k v_k = \vec{0}$; ne segue $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_k = 0$. La freccia opposta si ottiene in modo analogo.

Quindi, prese comunque k colonne di A, queste saranno indipendenti se e solo se lo saranno le corrispondenti colonne di λA ed il rango (che è il massimo numero di colonne indipendenti della matrice) sarà lo stesso.