COGNOME NOME

CORSO DI LAUREA | **INF** | **TWM** | ANNO DI IMMATRICOLAZIONE

MATRICOLA

SIMULAZIONE SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE

Per ottenere la sufficienza bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 7 domande della parte V/F e risolvere correttamente due esercizi della seconda parte. Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 3 ore.

Domande VERO/FALSO

(1) Se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare allora $F(1,1) = (1,1)$; **V** | **F** **F**

(2) se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare e

$$dim(Ker(F)) = n - m$$

allora F è suriettiva; **V** | **F** **V**

(3) il sottoinsieme $\{(k, 2k, 3k) : k \in \mathbb{R}\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$; **V** | **F** **V**

(4) una matrice diagonalizzabile ha almeno un autovalore; **V** | **F** **V**

(5) una matrice diagonalizzabile è sempre invertibile; **V** | **F** **F**

(6) se $dim(Ker(F)) > 1$ allora F ha almeno un autovettore; **V** | **F** **V**

(7) se i vettori $\{v_1 \dots, v_h\}$ sono indipendenti e i vettori $\{w_1, \dots, w_k\}$ sono indipendenti allora $\{v_1, \dots, v_h\} \cup \{w_1, \dots, w_k\}$ è ancora un insieme di vettori indipendenti; **V** | **F** **F**

(8) se una matrice $n \times m$ ha due righe uguali , allora il rango è strettamente minore di n; **V** | **F** **V**

(9) l'inverso moltiplicativo di $(1 + \mathbf{i}\sqrt{2})$ ha lo stesso argomento di $(1 - \mathbf{i}\sqrt{2})$; **V** | **F** **V**

(10) i vettori $(1, 2, 3)$, $(-3, -2, -1)$ sono ortogonali; **V** | **F** **F**

Esercizî

(1) Considerare i vettori $v_1 = e_1 - e_2 - 2e_3$ $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = e_2 + e_3$, dove $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   (b) Trovare le matrici del cambiamento di base $M^B_{\mathcal{E}_3}(id)$ e $M^{\mathcal{E}_3}_B(id)$.
   (c) Calcolare le coordinate del vettore $(1, 0, 1)$ rispetto alla base B.
   (d) Se la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è tale che $F(v_2) = (0, 0, 0)$, dimostrare che nella matrice $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(F)$ la seconda e la terza colonna sono uguali.

(2) Sia W il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:
$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } y + z + w = 0\}$$
   (a) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Determinare la dimensione di W, una base di W ed un vettore di W non appartenente a tale base.
   (c) Scrivere le coordinate del vettore $(1, -1, 1, 0) \in W$ rispetto a tale base.
   (d) Determinare il sottospazio ortogonale $W^\perp$ ed una sua base.

(3) Si consideri la seguente matrice 3×3
$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Calcolare gli autovalori della matrice e la loro molteplicità algebrica.
   (b) Calcolare l' autospazio relativo ad uno degli autovalori trovati e la sua dimensione.
   (c) Determinare se A è diagonalizzabile.
   (d) Se F è la trasformazione lineare tale che $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(F) = A$, determinare la matrice $M^B_B(F)$, per una base B composta da autovettori, se A è diagonalizzabile, oppure $B = (e_2, e_1, e_3)$, se A non è diagonalizzabile.

(4) Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare. Dimostrare che se F è iniettiva, allora $n \leq m$.

1. Soluzioni

(1) Considerare i vettori $v_1 = e_1 - e_2 - 2e_3$ $v_2 = (0, -1, 1)$, $v_3 = e_2 + e_3$, dove $\mathcal{E}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ è la base canonica di $\mathbb{R}^3$.
   (a) Dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   Riducendo a scala la matrice che ha per righe i vettori di B si ottiene:
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
   da cui, non essendoci righe nulle, deduciamo che i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti. Poiché tre vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ formano sempre una base, abbiamo dimostrato che B è una base.
   (b) Trovare le matrici del cambiamento di base $M^B_{\mathcal{E}_3}(id)$ e $M^{\mathcal{E}_3}_B(id)$.

$$M^B_{\mathcal{E}_3}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{\mathcal{E}_3}_B(id) = (M^B_{\mathcal{E}_3}(id))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(c) Calcolare le coordinate del vettore $v = (1, 0, 1)$ rispetto alla base B.

$$||v||_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(d) Se la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è tale che $F(v_2) = (0, 0, 0)$, dimostrare che nella matrice $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(F)$ la seconda e la terza colonna sono uguali.
Se c_1, c_2, c_3 sono le colonne della matrice $M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(F)$, allora

$${}^tF(v_2) = M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(F) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0c_1 - c_2 + c_3$$

e dall'ipotesi $F(v_2) = (0, 0, 0)$ si ottiene

$$-c_2 + c_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

quindi $c_2 = c_3$.

(2) Sia W il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^4$:

$$W = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y = 0 \text{ e } y + z + w = 0\}$$

(a) Dimostrare che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
W è l'insieme delle soluzioni di un sistema omogeneo ed è quindi un sottospazio.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases}$$

(b) Determinare la dimensione di W, una base di W ed un vettore di W non appartenente a tale base. La matrice dei coefficienti del sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + w = 0 \end{cases}$$

è a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le variabili che non sono pivots sono z, w, e possiamo sostituirle con i parametri liberi h, k rispettivamente. Risolvendo, si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x = (h + k) \\ y = -(h + k) \\ z = h \\ w = k \end{cases}$$

Lo spazio delle soluzioni è quindi $\{(h + k), -(h + k), h, k\}$ che ha dimensione 2. Una sua base B è data dai vettori $v_1 = (1, -1, 1, 0), v_2 = (1, -1, 0, 1)$.

(c) Scrivere le coordinate del vettore $v = (1, -1, 1, 0) \in W$ rispetto a tale base.

$$||v||_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(d) Determinare il sottospazio ortogonale $W^\perp$ ed una sua base.
Il sottospazio ortogonale avrà dimensione due: basta quindi trovare due vettori ortogonali ai vettori di B e linearmente indipendenti, ad esempio $w_1 = (1, 1, 0, 0), w_2 = (-1, 0, 1, 1)$.

(3) Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calcolare gli autovalori della matrice e la loro molteplicità algebrica.
Il polinomio caratteristico di A è:

$$det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -\lambda & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-\sqrt{2}]-\sqrt{2}(1-\lambda) = (1-\lambda)[-\lambda(1-\lambda)-2\sqrt{2}] = (1-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2\sqrt{2})$$

Gli autovalori sono le radici del polinomio caratteristico, quindi sono $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica pari ad 1, e le radici di

$$(\lambda^2 - \lambda - 2\sqrt{2}).$$

Applicando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado troviamo altre due radici:

$$\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{(2)} = \frac{1 + \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{1 + 8\sqrt{2}}}{2}$$

Entrambi gli autovalori hanno molteplicità algebrica uguale ad 1.

(b) Calcolare l'autospazio relativo ad uno degli autovalori trovati e la sua dimensione.
L'autospazio V_1 è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo che ha come matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed è quindi uguale a $V_1 = \{(-k/\sqrt{2}, 0, k) : k \in \mathbb{R}\}$ di dimensione 1 (com'era già ovvio vista la molteplicità algebrica dell'autobvalore).

(c) Determinare se A è diagonalizzabile.
La matrice A è diagonailzzabile perché ha 3 autovalori distinti. .

(d) Se F è la trasformazione lineare tale che $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(F) = A$, determinare la matrice $M^B_B(F)$, per una base B composta da autovettori, se A è diagonalizzabile, oppure $B = (e_2, e_1, e_3)$, se A non è diagonalizzabile.

$$M^B_B(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{1+8\sqrt{2}}}{2} \end{pmatrix}$$

(4) Sia $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una trasformazione lineare. Dimostrare che se F è iniettiva, allora $n \leq m$.

Se F è iniettiva, allora $dim(Ker(F)) = 0$ e da $dim(Ker(F))+dim(Im(F)) = n$ segue $dim(Im(F)) = n$. Ma $dim(Im(F))$ è sempre minore od uguale ad m.