

COGNOME _____ NOME _____
 CORSO DI LAUREA

INF	TWM
-----	-----

 ANNO DI IMMATRICOLAZIONE _____
 MATRICOLA _____

**SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE,
 17 GIUGNO 2013**

Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 2 ore.

Domande VERO/FALSO

- (1) Sia V uno spazio vettoriale con $\dim(V) = 5$ e siano U e W due sottospazi di V entrambi di dimensione 3.
 Allora $\dim(U \cap W) \geq 1$.

V	F
---	---

V
- (2) Se A è una matrice con n righe e $\text{rango}(A) < n$ allora le righe di A sono linearmente dipendenti.

V	F
---	---

V
- (3) Se v_1, v_2, v_3, v_4 sono quattro vettori di uno spazio vettoriale di dimensione 3 allora v_4 è combinazione lineare di v_1, v_2, v_3 .

V	F
---	---

F
- (4) Se λ_1, λ_2 sono autovalori della matrice quadrata A allora anche $\lambda_1 + \lambda_2$ è un autovalore di A .

V	F
---	---

F
- (5) Se lo spazio vettoriale V è generato dai vettori $v_1, \dots, v_n$ allora è generato anche dai vettori $2v_1, \dots, 2v_n$.

V	F
---	---

V
- (6) Esiste una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$ non suriettiva con $\dim(\text{Ker}(F)) = 2$.

V	F
---	---

F
- (7) In $\mathbb{R}^5$ esistono 6 vettori linearmente indipendenti.

V	F
---	---

F
- (8) Se $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare e $F(v) = w$, allora $2w \in \text{Im}(F)$.

V	F
---	---

V
- (9) Due vettori indipendenti in $\mathbb{R}^n$ sono sempre ortogonali.

V	F
---	---

F
- (10) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (1, 1)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare.

V	F
---	---

F

Esercizi

- (1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codominio, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

- (a) Determinare il valore di F sul generico vettore (x, y, z) del dominio.
- (b) Determinare la dimensione dell'immagine $Im(F)$ di F e una sua base. Determinare, se possibile, un vettore che non appartiene a tale immagine.
- (c) Determinare il sottospazio $Ker(F)$ e una sua base. Se possibile, determinare un vettore che non appartiene a questo sottospazio.
- (d) Determinare il sottospazio ortogonale $Ker(F)^\perp$ di $Ker(F)$ ed una trasformazione lineare $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $Ker(G) = Ker(F)^\perp$. Esiste un'unica trasformazione di questo tipo?

SOLUZIONI:

- (a) $F(x, y, z) = (3x + 2z, x + y + 4z, -x + 2y + 6z)$.
- (b) poiché $rango(A) = 2$ si ha $dim(Im(F)) = 2$; i vettori colonna di A generano $Im(F)$ quindi possiamo scegliere due colonne indipendenti per formare una base di $Im(F)$, ad esempio $B = (v_1, v_2)$, dove $v_1 = (3, 1, -1)$, $v_2 = (0, 1, 2)$. Il vettore $v_3 = (0, 0, 1) \notin Im(F)$ perché v_3 non è combinazione lineare di v_1, v_2 (v_1, v_2, v_3 sono indipendenti).
- (c) $Ker(F) = \{(-2h, -10h, 3h) : h \in \mathbb{R}\}$; $(1, 0, 0) \notin Ker(F)$.
- (d) Poiché $dim(Ker(F)) = 1$, il suo sottospazio ortogonale $Ker(F)^\perp$ ha dimensione 2 e $Ker(F)^\perp = L(w_1, w_2)$ dove $w_1, w_2 \in Ker(F)^\perp$ sono vettori indipendenti. Ad esempio, $w_1 = (5, -1, 0)$, $w_2 = (3, 0, 2)$. Sia $e_3 = (0, 0, 1)$; poiché $B = (w_1, w_2, e_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$, dato un vettore qualsiasi $v \neq (0, 0, 0)$ esiste un'unica trasformazione lineare $G_v : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tale che $G_v(w_1) = (0, 0, 0)$, $G_v(w_2) = (0, 0, 0)$ e $G_v(e_3) = v \neq (0, 0, 0)$. Per ognuna di queste trasformazioni si verifica facilmente che $Ker(G_v) = Ker(F)^\perp$.

- (2) (a) Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x, 4y - 2z, 2y).$$

- (i) Determinare il polinomio caratteristico di F , i suoi autovalori e la loro molteplicità algebrica.
 - (ii) Per ogni autovalore, determinare il relativo autospazio e la sua dimensione.
 - (iii) Determinare se F è diagonalizzabile.
 - (iv) Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base $B_1 = (e_2, e_1, e_3)$ per il dominio e alla base $B_2 = (e_3, e_2, e_1)$ per il codominio.
- (b) Dimostrare che se $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare invertibile e λ è un autovalore di G allora $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} è un autovalore per la trasformazione lineare G^{-1} .

SOLUZIONI:

- (a) (i) $P(\lambda) = (1 - \lambda)(\lambda - 2)^2$. Autovalori: $\lambda_1 = 1$ di molteplicità algebrica 1 e $\lambda_2 = 2$ di molteplicità algebrica 2.

- (ii) $V_1 = \{(k, 0, 0) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 e
 $V_2 = \{(0, k, k) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1.
- (iii) F non è diagonalizzabile perché la molteplicità geometrica dell'autovalore 2 è minore della sua molteplicità algebrica.
- (iv)

$$M_{B_2}^{B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è invertibile $\Leftrightarrow G$ è iniettiva (dominio e codominio hanno la stessa dimensione) $\Leftrightarrow \dim(Ker(G)) = 0 \Leftrightarrow 0$ non è un autovalore di G .

Quindi, se λ è un autovalore di G con G invertibile allora $\lambda \neq 0$. Inoltre se v è un autovettore di G relativo a λ si ha $G(v) = \lambda v$ e si ottiene

$$v = G^{-1}(G(v)) = G^{-1}(\lambda v) = \lambda(G^{-1}(v)),$$

da cui segue $G^{-1}(v) = \lambda^{-1}v$. Poiché $v \neq \vec{0}$ (è un autovettore di G) ne segue che v è anche un autovettore per G^{-1} , con autovalore λ^{-1} .