

COGNOME _____ NOME _____
 CORSO DI LAUREA

INF	TWM
-----	-----

 ANNO DI IMMATRICOLAZIONE _____
 MATRICOLA _____

**SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE,
 9 SETTEMBRE 2013**

Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco.

Domande VERO/FALSO

- (1) Il sottospazio vettoriale $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 2x\}$ di $\mathbb{R}^3$ ha dimensione 2;

V	F
---	---

F
- (2) se A è una matrice quadrata invertibile, anche la matrice A^{-1} è invertibile;

V	F
---	---

V
- (3) la matrice quadrata di dimensione n che ha tutti i coefficienti uguali a zero è priva di autovalori;

V	F
---	---

F
- (4) se $v_1, \dots, v_n$ sono dipendenti, anche i vettori $2v_1, \dots, 2v_n$ lo sono;

V	F
---	---

V
- (5) i vettori $v_1 = (1/2, -1/2)$ e $v_2 = (-1, 1)$ sono ortogonali in $\mathbb{R}^2$;

V	F
---	---

F
- (6) se F è lineare e per un certo v vale $F(-v) = F(v)$ allora $F(v)$ è il vettore nullo;

V	F
---	---

V
- (7) se $B = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$, allora anche $B' = (v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$ è una base di $\mathbb{R}^n$;

V	F
---	---

V
- (8) n vettori linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^n$ non possono generare $\mathbb{R}^n$;

V	F
---	---

V
- (9) se la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$ ha rango 4 allora è suriettiva;

V	F
---	---

F
- (10) la matrice
$$\begin{pmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{pmatrix}$$
 non è diagonalizzabile.

V	F
---	---

F

Esercizi

- (1) Considerare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2y - 8z = 8 \\ -4x + 5y + 9z = -9 \end{cases}$$

- (a) Descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema e, se il sistema ammette almeno una soluzione, determinare la dimensione dello spazio affine delle soluzioni.
- (b) Rispondi alle stesse domande per il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ x + 2y - 8z = 0 \end{cases}$$

e per il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x - 2y - z = -1 \end{cases}$$

- (c) Enunciare il Teorema di Rouché Capelli e verificarlo nei tre sistemi proposti, calcolando il rango della matrice dei coefficienti e della matrice completa.
- (d) Se A è una matrice $n \times n$ a coefficienti reali, dimostrare che le soluzioni del sistema omogeneo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

TRACCIA SOLUZIONE:

- (a) Riducendo il sistema con il metodo di Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & +5 & +9 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & +13 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ci accorgiamo che sia la matrice dei coefficienti sia la matrice completa del sistema hanno rango 3. Quindi il sistema ammette soluzione e le dimensioni dell'insieme delle soluzioni si trova sottraendo al numero delle incognite il rango della matrice dei coefficienti. Ne segue che l'insieme delle soluzioni ha dimensione zero ed il sistema ammette un'unica soluzione. Questa si ottiene lavorando dal basso verso l'alto nell'ultimo sistema ottenuto: $z = 3$, $y = 16$, $x = 29$. Quindi lo spazio affine delle soluzioni è

$$\{(29, 16, 3)\}.$$

- (b) Utilizzando il metodo di Gauss per il secondo sistema si ottiene:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

La variabile y non corrisponde ad alcun pivot e possiamo porla uguale ad un parametro k . Risolvendo il sistema si ottiene $z = 1/9$, $x = 8/9 - 2k$; l'insieme delle soluzioni

$$\{8/9 - 2k, k, 1/9\} : k \in \mathbb{R}$$

ha quindi dimensione 1.

Nell'ultimo sistema, invece,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'insieme delle soluzioni del sistema corrisponde quindi al piano di equazione $x + 2y + z = 1$ ed ha dimensione 2. Possiamo scegliere $y = k, z = h$ come parametri e l'insieme delle soluzioni si scrive come

$$\{(1 - 2k - h, k, h) : k, h \in \mathbb{R}\}.$$

- (c) Teorema di Rouché-Capelli: un sistema lineare ha soluzione se e solo se il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa del sistema. In questo caso la dimensione dello spazio affine delle soluzioni è pari al numero delle incognite meno il rango della matrice dei coefficienti. Si verifica nei tre casi precedenti dove il rango in questione è rispettivamente: 3, 2, 1.
- (d) Bisogna verificare che se $v = (x_1, \dots, x_n)$ e $v' = (x'_1, \dots, x'_n)$ sono soluzioni del sistema, allora anche ogni loro combinazione lineare lo è. Questo si verifica facilmente perché, per le proprietà delle matrici, si ha:

$$A(\lambda_1 v + \lambda_2 v') = \lambda_1 Av_1 + \lambda_2 Av_2.$$

Quindi, se v_1, v_2 sono soluzioni del sistema, si ha $Av_1 = Av_2 = \vec{0}$, e anche $A(\lambda_1 v + \lambda_2 v') = \vec{0}$.

- (2) Si consideri la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x, y, z) = (z - y, y, 3x + z).$$

- (a) Determinare nucleo e immagine della trasformazione, e se è iniettiva o suriettiva.
- (b) Determinare la matrice A della trasformazione F rispetto alle basi canoniche del dominio e del codominio e dimostrare che tale matrice ammette 1 come autovalore.
- (c) Determinare l'autospazio della matrice A del punto precedente relativo all'autovalore 1 e la sua dimensione.
- (d) Determinare gli altri autovalori di A e stabilire se esiste una base B di $\mathbb{R}^3$ tale che

$$M_B^B(F)$$

sia una matrice diagonale.

TRACCIA SOLUZIONE:

- (a) Risolvendo il sistema $F(x, y, z) = (0, 0, 0)$ si vede facilmente che $\text{Ker}(F) = \{(0, 0, 0)\}$. La trasformazione è quindi iniettiva. L'immagine è data da

$$\{(z - y, y, 3x + z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

e dall'equazione $3 = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$ segue che $\dim(\text{Im}(F)) = 3$. La trasformazione è quindi suriettiva.

- (b)

$$M_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}(F) = A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1 è un autovalore di A se e solo se esiste un vettore $v = (x, y, z)$ non nullo tale

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y + z \\ y \\ 3x + z \end{pmatrix}$$

Ne segue:

$$\begin{cases} x = -y + z \\ y = y \\ z = 3x + z \end{cases}$$

Dalla terza equazione segue $x = 0$ e dalle altre si ricava facilmente $z = y$. Una soluzione è quindi il vettore non nullo $(0, 1, 1)$ e quindi 1 è un autovalore di A .

- (c) L'autospazio V_1 è dato dalle soluzioni del sistema di cui sopra. Quindi $V_1 = \{(0, k, k) : k \in \mathbb{R}\}$ e ha dimensione 1.
- (d) Calcolando il polinomio caratteristico di A si ottiene

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = -\lambda(1 - \lambda)^2 - 3(1 - \lambda) = \\ &= (1 - \lambda)[- \lambda(1 - \lambda) - 3] = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 3). \end{aligned}$$

Le radici di $p(\lambda)$ sono quindi $1, (1 + \sqrt{13})/2, (1 - \sqrt{13})/2$. La matrice ha quindi 3 autovalori distinti ed è diagonalizzabile. La diagonalizzabilità equivale all'esistenza di una base B di autovalori e per questa base la matrice $M_B^B(F)$ è diagonale.