COGNOME NOME
CORSO DI LAUREA **INF** | **TWM** ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE, 8 LUGLIO 2013

Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco.

Domande VERO/FALSO

(1) ll rango di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è uguale alla dimensione di $Ker(F)$. **V** | **F** **F**

(2) Se F è una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ allora la dimensione di $Im(F)$ è minore o uguale ad m. **V** | **F** **V**

(3) Quattro vettori in uno spazio vettoriale di dimensione 5 sono sempre linearmente indipendenti. **V** | **F** **F**

(4) Se v è un autovettore della matrice quadrata A relativo all'autovalore λ allora il vettore $2v$ è un autovettore della matrice A relativo all'autovalora 2λ. **V** | **F** **F**

(5) L'equazione $z^3 = -4$ ha quattro soluzioni distinte in $\mathbb{C}$. **V** | **F** **F**

(6) Non esiste alcuna trasformazione lineare suriettiva con dominio $\mathbb{R}^5$ e codominio $\mathbb{R}^3$. **V** | **F** **F**

(7) La matrice quadrata $n \times n$ con $n > 1$ e tutti i coefficienti uguali ad 1 è invertibile. **V** | **F** **F**

(8) Se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare e $F(v) = -F(v')$, allora $v + v' \in Ker(F)$. **V** | **F** **V**

(9) Due vettori ortogonali in $\mathbb{R}^n$ sono sempre indipendenti[1] **V** | **F** **F**

(10) Se A è una matrice quadrata di dimensione n allora esiste sempre una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A. **V** | **F** **F**

[1] L'affermazione è vera se i vettori sono non nulli ma non in generale. Poiché questo ha tratto in inganno molti studenti, si è deciso di calcolare come corretta anche la risposta **V**.

Esercizi

(1) Considerare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 3x + 2y + 5z = -3 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

(a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti e il rango della matrice orlata.

(b) Descrivere l'insieme delle soluzioni del sistema e, se il sistema ammette almeno una soluzione, determinare la dimensione dello spazio affine delle soluzioni.

(c) Se A è la matrice dei coefficienti del sistema di cui sopra ed F è la trasformazione lineare tale che $M^{\mathcal{E}_3}_{\mathcal{E}_3}(F) = A$, determinare l'immagine di F, il nucleo di F, una base B_1 per il nucleo e una base B_2 per l'immagine.

(d) Dimostrare in generale che se $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è una trasformazione lineare con $M^{\mathcal{E}_n}_{\mathcal{E}_m}(F) = A$ allora l'immagine di F è generata dai vettori colonna della matrice A.

TRACCIA SOLUZIONE:

(a) Riducendo a scala le matrici si vede che rango della matrice dei coefficienti è uguale a 2, che è anche il rango della matrice orlata.

(b) Lo spazio affine delle soluzioni è dato da

$$\{(-1-k, -k, k) : k \in \mathbb{R}\}$$

ed ha dimensione 1.

(c) $Im(F) = L(v_1, v_2, v_3)$ dove v_1, v_2, v_3 sono le colonne della matrice A. Si ha $dim(Im(F)) = rango(A) = 2$. Poiché i vettori v_1, v_2 sono indipendenti e appartengono a $Im(F)$ possiamo scegliere $B_2 = (v_1, v_2)$. Per quanto riguarda il nucleo, poiché $dim(Ker(F)) + dim(Im(F)) = 3$ si ha $dim(Ker(F)) = 1$; per trovare una base per $Ker(F)$ basta allora trovare un vettore v non nullo nel nucleo, ad esempio $v = (1, 1, -1)$: si ha $Ker(F) = L(v)$ e possiamo scegliere $B_1 = (v)$.

(d) Le colonne della matrice A sono i vettori $F(e_1), \dots, F(e_n)$. Questi vettori generano l'immagine perché se $w = F(v) \in Im(F)$ e $v = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ allora $w = \lambda_1 F(e_1) + \dots + \lambda_n F(e_n) \in L(F(e_1), \dots, F(e_n))$.

(2) Si consideri la seguente matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare se la matrice A è invertibile e in caso positivo trovarne l'inversa A^{-1}.

(b) Trovare il polinomio caratteristico della matrice A ed i suoi autovalori.

(c) Determinare gli autospazi di A, la loro dimensione e se A è diagonalizzabile.

(d) Data la base $B = (e_1, e_1+e_2, e_3)$ di $\mathbb{R}^3$, determinare una trasformazione lineare F tale che la matrice A del punto 1 sia uguale alla matrice di F rispetto alla base B per il dominio e alla base canonica per il codominio, ovvero

$$A = M^B_{\mathcal{E}_3}(F)$$

Qual è il valore di F sul vettore (x, y, z)?

TRACCIA SOLUZIONE:

(a) Poiché $det(A) = -1$ la matrice A è invertibile e (come si calcola facilmente)

$$A^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ della matrice A è dato da

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$$

i suoi autovalori sono quindi $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$.

(c) Si ha $V_1 = \{(0, 0, k) : k \in \mathbb{R}\}$, $V_{-1} = \{(0, k, 0) : k \in \mathbb{R}\}$ entrambi di dimensione 1. Poichè $mg(1) = dim(V_1) = 1$ e $ma(1) = 2$, la matrice A non è diagonalizzabile.

(d) Dall'ipotesi

$$A = M^{B}_{\mathcal{E}_3}(F)$$

segue $F(e_1) = (1, 0, -1)$, $F(e_1 + e_2) = (0, -1, 0)$, $F(e_3) = (0, 0, 1)$. Poiché F deve essere lineare, si ha $F(e_1) + F(e_2) = F(e_1 + e_2) = (0, -1, 0)$ da cui segue $F(e_2) = (0, -1, 0) - F(e_1) = (-1, -1, 1)$. Quindi F è univocamente determinata e

$$F(x, y, z) = xF(e_1) + yF(e_2) + zF(e_3) =$$

$$(x, 0, -x) + (-y, -y, y) + (0, 0, z) = (x - y, -y, -x + y + z)$$