# 1 Addendum sull'inversa di una matrice

Sia $A$ una matrice quadrata $n \times n$ invertibile (quindi $det(A) \neq 0$), e sia $A_{i,j}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da $A$ cancellando l'iesima riga e la j-esima colonna. Ad esempio, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

allora

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice inversa $A^{-1}$ si ottiene moltiplicando il nunero $det(A)^{-1}$ per la matrice che ha come coefficiente di posto $i, j$:

- se $i + j$ è pari, il determinante della matrice $A_{j,i}$ (notare lo scambio degli indici!)
- se $i + j$ è dispari, l'opposto di questo determinante.

In formule: $A^{-1} = det(A)^{-1}(c_{i,j})$ dove $c_{i,j} = (-1)^{i+j} det(A_{j,i})$.

**Esempio** La matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ha determinante uguale a $-1$, quindi la matrice è invertibile. Per trovare l'inversa, calcoliamo: $det(A_{1,1}) = -1$, $det(A_{1,2}) = -1$, $det(A_{1,3}) = -1$, $det(A_{2,1}) = 0$, $det(A_{2,2}) = 1$, $det(A_{2,3}) = 1$, $det(A_{3,1}) = 0$, $det(A_{3,2}) = 1$, $det(A_{3,3}) = 0$. Quindi i coefficienti $c_{i,j} = det(A_{j,i})$ sono: $c_{1,1} = -1$, $c_{1,2} = 0$, $c_{1,3} = 0$, $c_{2,1} = 1$, $c_{2,2} = 1$, $c_{2,3} = -1$, $c_{3,1} = -1$, $c_{3,2} = -1$, $c_{3,3} = 0$.

Infine si ha

$$A^{-1} = det(A)^{-1}(c_{i,j}) = -1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 1.**

Verificare che l'invertibilità della matrice seguente e determinarne l'inversa:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

**SOL**

$$A^{-1} = 1/5 \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -8 & 1 & 2 \\ 7 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$