1. Cambiamenti di Base, Autovalori, Autovettori e Diagonalizzazione

(1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su R e $B = (v_1, v_2)$, $B' = (w_1, w_2)$ due basi per V tali che $v_1 = 6w_1 - 2w_2$ e $v_2 = 9w_1 - 4w_2$.
   (a) Determina la matrice del cambiamento di base $M^B_{B'}(id)$;
   (b) Trova le coordinate $[v]_{B'}$ per il vettore $v = -3v_1 + 3v_2$.

(2) Nello spazio vettroriale $\mathbb{R}^2$ considera i seguenti vettori: $v_1 = (-9, 1), v_2 = (-5, -1), w_1 = (1, -4), w_2 = (3, -5)$.
   (a) Dimostra che $B = (v_1, v_2)$ e $B' = (w_1, w_2)$ sono basi di $\mathbb{R}^2$;
   (b) determina il vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $[v]_B = (-1, 1)$;
   (c) determina la matrice $M^B_{B'}(id)$ del cambiamento di base; utilizzando questa matrice, trova le coordinate $[v]_{B'}$ del vettore v rispetto alla base B'.
   (d) Determina anche la matrice $M^{B'}_B(id)$; chi è $M^B_{B'}(id)M^{B'}_B(id)$? (senza fare calcoli...)

   SOL: $v = -v_1 + v_2 = (4, -2)$, $\quad M^B_{B'}(id) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$,
   $[v]_{B'} = (-2, 2)$, $\quad M^{B'}_B(id) = \begin{pmatrix} -3/2 & -2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) Sia $M^B_{B'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice del cambiamento di base dalla base $B = (v_1, v_2, v_3)$ alla base $B' = (w_1, w_2, w_3)$ dello spazio vettoriale V. Se $w_1 = (-2, 2, 3), w_2 = (-8, 5, 2), w_3 = (-7, 2, 6)$, chi sono v_1, v_2 e v_3?

(4) Nei casi seguenti, stabilisci quando il vettore v è un autovettore della matrice A. Se la risposta è affermativa, trova il corrispondente autovalore.
   (a)
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = (1, -2, 2).$$
   (b)
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = (1, 0, 1).$$
   Sol. (a) No, (b) Si, $\lambda = 2$

(5) Costruisci una matrice A che abbia il vettore $v = (1, 1, 1)$ come autovettore con autovalore $\lambda = 3$. Rispondi alla stessa domanda con $v = (-1, 0, 1)$ e $\lambda = 5$.

(6) Nei casi seguenti, stabilisci quando il numero λ è un autovalore della matrice A. Se la risposta è affermativa, trova una base dell'autospazio corrispondente:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2$$

Sol. (a) si : per trovare una base di V_4 bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x & & -z & = 0 \\ 2x & -y & +z & = 0 \\ -3x & +4y & +z & = 0 \end{cases}$$

Riducendo ad un sistema a scala troviamo che $V_4 = \{(-k, -k, k) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 e una sua base è, ad esempio $B = ((-1, -1, 1))$

(b) no, gli autovalori sono 3 e 5.

(7) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x + 3y + 3z, -3x - 5y - 3z, 3x + 3y + z).$$

Determinare:

(a) la matrice A che rappresenta F rispetto alle basi canoniche per dominio e codominio;
(b) il polinomio caratteristico di F ed i suoi autovalori;
(c) la dimensione degli autospazi relativi agli autovalori e una base di ogni autospazio;
(d) se F è diagonalizzabile; in tal caso trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$;

SOL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = -(\lambda + 2)^2(\lambda - 1).$$

Ci sono due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$.

$V_1 = \{(k, -k, k) : k \in \mathbb{R}\}$. Una base dell'autospazio V_1 è data da $B_1 = ((1, -1, 1))$.

$V_{-2} = \{(-h - k, h, k) : k \in \mathbb{R}\}$. Una base è data da $B_2 = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ L'insieme $B = B_1 \cup B_2$ ha cardinalità 3 ed è quindi una base di autovettori della trasformazione F che risulta diagonalizzabile.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(8) Sia F una trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codomino è rappresentata dalla seguente matrice 3×3:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

(a) il polinomio caratteristico di F e i suoi autovalori;

(b) la dimensione degli autospazi relativi agli autovalori e una base di ogni autospazio;

(c) se F è diagonalizzabile.

(9) Stabilire se la seguente matrice A è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

In caso affermativo, trova una base B di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A, la matrice D che diagonalizza A e la matrice P tale che $D = P^{-1}AP$.

Sol A è diagonalizzabile. Una base di autovettori è, ad esempio, $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dove $v_1 = (-8, 4, 1, 0), v_2 = (-16, 4, 0, 1), v_3 = (0, 0, 1, 0), v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Nota bene: i due autovettori v_3, v_4 relativi all'autovalore $\lambda = -3$ si trovano senza fare conti, semplicemente guardando le colonne della matrice...)

(10) Una matrice quadrata si dice triangolare superiore se i coefficienti al di sotto della diagonale principale sono nulli. Dimostra che per una matrice triangolare superiore gli autovalori sono i numeri che compaiono sulla diagonale principale. Questo significa necessariamente che ogni matrice diagonale superiore è diagonalizzabile?

(11) Dimostra che una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ha come autovalore 0 se e solo se non è invertibile.

(12) Si consideri le traformazioni lineari $F_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ (una per ogni parametro $t \in \mathbb{R}$) definite dalle seguenti equazioni:

$$F_t(e_1) = (1, 0, -t), F_t(e_2) = (0, -1, 0), F_t(e_3) = (0, 0, 1).$$

(a) Considera la trasformazione F_1. Quanto vale sul generico vettore (x, y, z) di R^3?

(b) Scrivi la matrice di F_1 rispetto alla base canonica per dominio e codominio e la matrice della trasformazione F_0 sempre rispetto alla base canonica.

(c) Fissato un paramentro t, scrivi la matrice di F_t rispetto alla base canonica per dominio e codominio.

(d) Determinare gli autovalori di F_1 e se F_1 è diagonalizzabile.

(e) Determinare gli autovalori di F_0 e se F_0 è diagonalizzabile.
(f) Determinare, per un generico valore del parametro t, gli autovalori della trasformazione lineare F_t.
(g) Determinare per quali valori del parametro t la trasformazione lineare F_t è diagonalizzabile.