

Esercizi su trasformazioni lineari e matrici

- (1) Stabilire quali fra le seguenti applicazioni sono trasformazioni lineari; in caso positivo determinare la matrice corrispondente alla trasformazione (relativamente alle basi canoniche).

- (a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(x, y) = (x + y, x, x - y)$;
- (b) $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con $F(x, y, z) = (x + y + z, \sqrt{2}x + 1)$;
- (c) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(x, y) = (x^2, x, x - y)$;
- (d) $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con $F(x, y, z, w) = (w, y, x)$.

- (2) Sia A la seguente matrice:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/\pi \end{pmatrix}$$

Se $F_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare che corrisponde ad A , cioè

$$F_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Esprimere il vettore

$$F_A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

come combinazione lineare delle colonne di A ,

- (3) Sia $\mathbb{P}^2$ l'insieme dei polinomi di grado minore o uguale di 2:

$$\mathbb{P}^2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostrare che $\mathbb{P}^2$ è uno spazio vettoriale, con le operazioni definite da:

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2) + (b_0 + b_1x + b_2x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2$$

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2.$$

Sia T la funzione $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $T(p) = (p(0), p(1))$ (ad esempio, se $p = 1 + x + 2x^2$ allora $T(p) = (1, 4)$).

- (a) Dimostrare che T è una trasformazione lineare.
 - (b) Trovare un polinomio p , diverso dal polinomio nullo, tale che $T(p)$ sia il vettore nullo di $\mathbb{R}^2$.
 - (c) T è iniettiva? T è suriettiva?
 - (d) T è un isomorfismo di spazi vettoriali?
- (4) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$. Sia $T : V \rightarrow V$ la trasformazione lineare definita da $T(A) = A + {}^t A$, dove ${}^t A$ è la trasposta della matrice A .
- (a) Dimostrare che T è una trasformazione lineare.

- (b) Se B è la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

trovare A tale che $T(A) = B$.

- (c) Più in generale, se B è una matrice simmetrica (cioè tale che $B = {}^t B$) trovare A tale che $T(A) = B$.
- (d) Determinare quali sono le matrici che appartengono all'immagine di T .
- (5) Siano V, W spazi vettoriali su $\mathbb{R}$, $B = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V e T una trasformazione lineare $T : V \rightarrow W$.
- (a) dimostrare che l'immagine di T , cioè

$$Im(T) = \{T(v) : v \in W\}$$

è un sottospazio vettoriale di W .

- (b) Dimostrare che $Im(T)$ è generato dai vettori $T(v_1), \dots, T(v_n)$, cioè

$$Im(T) = L(T(v_1), \dots, T(v_n)).$$

- (c) Trovare un esempio di trasformazione lineare in cui i vettori $T(v_1), \dots, T(v_n)$ siano dipendenti.
- (d) Se T è iniettiva, dimostrare che $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sono indipendenti.
- (e) Se A è una matrice $n \times m$ con colonne $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^n$ e $T_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ è la trasformazione lineare associata ad A , cioè:

$$T_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

da chi è generato il sottospazio $Im(F)$?

- (6) Sia F la trasformazione lineare dell'esercizio 2). Determinare una base per $Im(F)$.

- (7) Sia $T : V \rightarrow W$ una trasformazione lineare dove V, W sono spazi vettoriali su $\mathbb{R}$ a dimensione finita, $dim(V), dim(W)$.

- (a) Se i vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti in V , i vettori $T(v_1), \dots, T(v_k)$ sono linearmente dipendenti in W .

V	F
---	---

- (b) Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di W .

V	F
---	---

- (c) Se T è iniettiva e $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora i vettori $T(v_1), \dots, T(v_n)$ generano W

V	F
---	---

- (d) Se T è suriettiva e $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora i vettori $T(v_1), \dots, T(v_n)$ generano W

V	F
---	---

- (e) Se T è biunivoca e $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora i vettori $T(v_1), \dots, T(v_n)$ generano W

V	F
---	---

- (f) Se T è suriettiva allora $dim(W) \geq dim(V)$

V	F
---	---

- (g) Se T è iniettiva allora $dim(W) \geq dim(V)$

V	F
---	---

- (h) Se T è un isomorfismo, $dim(W) = dim(V)$

V	F
---	---