Dato uno spazio vettoriale V di dimensione n ed una sua base $B = (v_1, \ldots, v_n)$, le coordinate di un vettore $v \in V$ rispetto alla base B sono l'unica $n-pla$ $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tale che $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Indichiamo questa n-pla con $[v]_B$.

Ad esempio, qualsiasi sia $B = (v_1, \ldots, v_n)$ si ha $[v_1]_B = (1, 0, \ldots, 0)$ (infatti $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots 0 \cdot v_n$), $[v_2]_B = (0, 1, \ldots, 0)$ e cosí via.

Indichiamo con

$$[\,]_B : V \to R^n$$

la trasformazione lineare che, applicata ad un vettore v, restituisce le sue coordinate rispetto alla base B.

(1) Considera i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$: $v_1 = (1, 2, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (2, 0, 0)$.
  (a) Dimostra che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
  (b) Determina le coordinate dei seguenti vettori nella base B: $v = v_1 - v_2 + v_3$ (non c'è bisogno di fare alcun calcolo!), $w = (3, 1, 0)$, $z = (0, 1, -1)$.
  (**R:** $[v]_B = (1, -1, 1)), [w]_B = (0, 1, 1), [z]_B = (-1, 3, -1)$)
  (c) Determina il vettore v di $\mathbb{R}^3$ che ha coordinate $(2, -1, 3)$ rispetto alla base B.

(2) In $\mathbb{R}^3$sono dati i vettori $u_1 = (1, 1, 2), u_2 = (2, -1, 3), u_3 = (3, 0, h)$; dire per quali valori di h i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti (suggerimento: considerare la matrice delle righe e ridurre a scala. Trovare per quali valori di h lo spazio delle righe ha dimensione...)
(**R:** $h \neq 5$)

(3) In $\mathbb{R}^4$ sono dati i vettori $u_1 = (1, -1, 0, 1), u_2 = (2, 1, 1, 0), u_3 = (3, 0, 1, 1), u_4 = (0, 1, -1, 0)$. Verificare che i vettori u_1, u_2, u_4 sono linearmente indipendenti, e che u_3 è una loro combinazione lineare. Trovare le coordinate (a, b, c) di u_3 rispetto alla base u_1, u_2, u_4 del sottospazio vettoriale $L(u_1, u_2, u_3, u_4)$.
Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il vettore $v = (1, -1, 2t-8, t+1)$ appartiene allo spazio $L(u_1, u_2, u_4)$
(suggerimento: $v \in L(u_1, u_2, u_4)$ se e solo i sottospazi $L(u_1, u_2, u_4)$e $L(u_1, u_2, u_4, v)$ hanno la stessa dimensione (perché?)) Per i valori di t trovati, determinare le coordinate (λ, μ, ν) di v rispetto ai vettori u_1, u_2, u_4.
(**R:** $(a, b, c) = (1, 1, 0)$, $t = 2$, $(\lambda, \mu, \nu) = (3, -1, 3)$)

(4) Considerare lo spazio vettoriale $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali e i seguenti sottoinsiemi:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_2 = x_3 \right\}, T = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} : x_2 = -x_3 \right\}$$

  (a) Dimostrare che S, T e W sono sottospazi vettoriali di $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e trovare una base di ognuno di loro.
  (b) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $A \in S, B \in T$ determinarne le coordinate rispetto alla base trovata.

(5) Sia (e_1, e_2, e_3) la base canonica di $\mathbb{R}^3$.

(a) Dati i vettori u_1, u_2, u_3 con

$$u_1 = e_1 + e_2, \quad u_2 = -e_2, \quad u_3 = e_3,$$

dimostrare che (u_1, u_2, u_3) è ancora una base per $\mathbb{R}^3$.

(b) Considerare il vettore $v = (3, 2, 1)$ e scriverlo prima come combinazione lineare degli elementi della base canonica e poi come combinazione lineare degli elementi della base (u_1, u_2, u_3).

(c) Considerare il vettore $v = u_1 + u_2 - u_3$ e scriverlo come combinazione lineare dei vettori della base canonica.

(6) Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare indotta dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

relativamente alle basi cononiche del dominio e codominio. Determinare il valore di F sul generico vettore (x, y, z, w) di $\mathbb{R}^4$.