Esercizi su Spazi Vettoriali, Indipendenza Lineare, Sottospazi e Basi

DOMANDE VERO/FALSO

(1) Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V e $w \in V$ allora $(v_1, \dots, v_n, w)$ è ancora una base di V. **V** | **F**

(2) Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V e $w \in V$ allora $v_1, \dots, v_n, w$ generano ancora V. **V** | **F**

(3) Se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora $(v_1, \dots, v_{n-1})$ è ancora una base di V. **V** | **F**

(4) Se i vettori $v_1, \dots, v_n$ generano V allora i vettori $v_1, \dots, v_{n-1}$ generano ancora V. **V** | **F**

(5) Dati i vettori $v_1, \dots, v_n$, se esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ e $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ con

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \lambda'_1 v_1 + \ldots + \lambda'_n v_n$$

allora i vettori $v_1, \dots, v_n$ non sono linearmente indipedenti. **V** | **F**

(6) Due vettori diversi sono sempre linearmente dipendenti. **V** | **F**

(7) Se W è un sottospazio di V e $(w_1, \dots, w_n)$ è una base di W , allora $L(w_1, \dots, w_n) = W$. **V** | **F**

(8) Dato uno spazio vettoriale V, se $L(v_1, \dots, v_n) = W$ allora i vettori $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti. **V** | **F**

(9) se lo spazio vettoriale V è generato da k vettori, non può essere generato da meno di k vettori; **V** | **F**

ESERCIZI

(1) Dati i vettori $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 0, 1)$ in $\mathbb{R}^3$ determina se il vettore $v = (1, 1, 1)$ appartiene a $L(v_1, v_2)$.
Descrivi il sottospazio $L(v_1, v_2)$.
I vettori v_1, v_2 formano una base di $L(v_1, v_2)$?
Scrivi il vettore $(\sqrt{2}, 0, 1)$ come combinazione lineare di v_1, v_2.

(2) Sia V lo spazio vettoriale delle matrici $2x2$ a coefficienti reali.
 (a) Trova due vettori linearmente dipendenti in V;
 (b) trova tre vettori linearmente dipendenti, ma a due a due linearmente indipendenti;
 (c) trova una base di V

 (a) Considerando $\mathbb{C}$ come uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, determina quele dei seguenti insiemi ordinati di vettori è una base.
  (i) $(i, 1)$;
  (ii) (v_1, v_2) dove v_1è un numero puramente immaginario (cioè $v_1 = ki$ per $k \in \mathbb{R}$ e $v_2 \in \mathbb{R}$;
  (iii) $(i, 2i)$;
  (iv) $(1, i, 1 + i)$.

(b) Considera i numeri complessi come uno spazio vettoriale sui numeri razionali $\mathbb{Q}$, dove la somma fra vettori è l'usuale somma dei numeri complessi e il prodotto di un numero razionale q per un complesso $z = a + ib$ è il prodotto usuale dato da $qz = qa + iqb$. I vettori 1 e $\sqrt{2}$ sono dipendenti o indipendenti in questo spazio vettoriale? I vettori 1, i e $\sqrt{2}$ sono dipendenti o indipendenti in questo spazio vettoriale?

(c) Considera l'insieme P_2 di tutti i polimomi di secondo grado a coefficienti reali, cioè

$$P_2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Dimostra che P_2 è uno spazio vettoriale cin somma e prodotto con uno scalare λ definiti da:

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2,$$

$$\lambda(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2.$$

Dimostra che P_2 è uno spazio vettoriale e trovane una base.