

Primi Esercizi su Spazi Vettoriali, Indipendenza Lineare e Sottospazi

- (1) Determinare quali dei seguenti insiemi di vettori formano un insieme di vettori linearmente indipendenti nel corrispondente spazio vettoriale V . Nel caso non siano indipendenti, trovare una loro combinazione lineare non banale uguale al vettore nullo, ed esprimere uno dei vettori come combinazione lineare degli altri.

- (a) $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (2, -1, 0), v_3 = (0, -5, 10)$, nello spazio $V = \mathbb{R}^3$;
 (b) $v_1 = (2, 0, 3), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$ nello spazio $V = \mathbb{R}^3$;
 (c) $v_1 = (0, 0, 0), v_2 = (0, 1, 0), v_3 = (1, 1, 1)$ nello spazio $V = \mathbb{R}^3$;
 (d)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & -4\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

nello spazio vettoriale $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ delle matrici 2×2 a coefficienti reali.

- (e) $v_1 = (1, 1), v_2 = (-1, 3), v_3 = (0, 2)$ nello spazio $V = \mathbb{R}^2$.

- (2) Determina quale dei seguenti sottoinsiemi W è un sottospazio vettoriale del corrispondente spazio vettoriale V .

- (a) $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a, b \in \mathbb{Z}\}; V = \mathbb{R}^2$;
 (b) $W = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 1\}; V = \mathbb{R}^2$;
 (c) $W = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i = 0\}; V = \mathbb{R}^n$;
 (d) $W = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}; V = \mathbb{R}^2$;
 (e) fissati $a, b \in \mathbb{R}$, l'insieme $W = \{(x, y) : ax + by = 0\}, V = \mathbb{R}^2$;
 (f) fissati $a, b \in \mathbb{R}$, l'insieme $W = \{(x, y) : ax + by = 1\}, V = \mathbb{R}^2$;
 (g) $W = \{A = (a_{i,j}) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a_{1,1} = 0\}, V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$;
 (h) $W = \{A = (a_{i,j}) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a_{i,j} = 0 \text{ se } i < j\}, V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.

- (3) Considera lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ delle successioni reali, con somma termine a termine e prodotto per uno scalare definito da

$$\lambda(a_0, a_1, a_2, \dots) = (\lambda a_0, \lambda a_1, \lambda a_2, \dots).$$

- (a) Determina tre vettori linearmente indipendenti nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
 (b) Determina un insieme infinito di vettori in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tale che ogni suo sottoinsieme finito sia un insieme di vettori linearmente indipendenti.
 (c) Considera l'insieme W dei vettori che hanno 0 nei posti di indice pari (ad esempio, $v = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots) \in W$). L'insieme W è un sottospazio di V ? Ripetere l'esercizio con l'insieme W' dei vettori che hanno 1 nei posti di indice pari.

- (4) Determinare una base per lo spazio vettoriale delle matrici $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$; più in generale, fissato $n \in \mathbb{N}$, determinare una base per lo spazio vettoriale $M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

- (5) L'insieme $v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, -1, 0), v_3 = (0, 0, 1)$, è una base dello spazio $V = \mathbb{R}^3$?
- (6) Determina quali degli insiemi seguenti sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$. In caso affermativo determina una base del sottospazio.
- $W_1 = \{(x, y, z) : x = y, z = 1\}, \quad W_2 = \{(x, y, z) : x + 2y = 0, z = 0\},$
 $W_3 = \{(x, y, z) : x - y = 10\}, \quad W_4 = \{(x, y, z) : x + y - 3z = 0\}.$
- (7) Sia V uno spazio vettoriale su K e v_1, v_2, v_3 tre vettori linearmente indipendenti. Dimostra che i vettori v'_1, v'_2, v'_3 sono ancora indipendenti, dove
- $$v'_1 = v_1, \quad v'_2 = v_1 + v_2, \quad v'_3 = v_1 + v_2 + v_3.$$

DOMANDE VERO/FALSO

- (1) una base di uno spazio vettoriale contiene sempre il vettore nullo;

V	F
---	---
- (2) Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V , esistono scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ in $\mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$; dove 0_V è il vettore nullo di V

V	F
---	---
- (3) una base non può contenere un insieme di vettori linearmente dipendenti;

V	F
---	---
- (4) un sottoinsieme di una base è sempre una base;

V	F
---	---
- (5) un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente indipendenti è a sua volta un insieme di vettori linearmente indipendenti;

V	F
---	---
- (6) un sottoinsieme di un insieme di vettori linearmente dipendenti è a sua volta un insieme di vettori linearmente dipendenti;

V	F
---	---
- (7) Considera i numeri complessi come uno spazio vettoriale sui numeri reali $\mathbb{R}$, dove la somma fra vettori è l'usuale somma dei numeri complessi e il prodotto di un numero reale r per un complesso $z = a + ib$ è l'usuale prodotto $rz = ra + irb$.
- (a) I vettori 1 ed i sono linearmente indipendenti;

V	F
---	---
- (b) i vettori 1 ed $\sqrt{2}$ sono linearmente indipendenti;

V	F
---	---
- (c) i vettori i ed $-2i$ sono linearmente indipendenti;

V	F
---	---
- (d) $\mathbb{C} = L(1, i)$;

V	F
---	---
- (e) due vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre indipendenti;

V	F
---	---
- (f) due vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre dipendenti;

V	F
---	---
- (g) tre vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre indipendenti;

V	F
---	---
- (h) tre vettori in $\mathbb{C}$ sono sempre dipendenti;

V	F
---	---
- (i) $\mathbb{R}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$;

V	F
---	---
- (j) $\mathbb{Q}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}$ su $\mathbb{R}$.

V	F
---	---