## Domande VERO/FALSO

(1) L'insieme vuoto $\emptyset$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. **V** | **F**

(2) Esistono spazî vettoriali euclidei di dimensione finita che non ammettono una base ortonormale. **V** | **F**

(3) Se una matrice quadrata $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ha determinante nullo, allora è invertibile. **V** | **F**

(4) Esistono vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita di norma nulla. **V** | **F**

(5) L'applicazione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da $f(x,y) = (-y,-x)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, è un isomorfismo lineare. **V** | **F**

(6) L'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. **V** | **F**

(7) il sistema lineare $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - 2x = -2 \end{cases}$ ha infinite soluzioni. **V** | **F**

(8) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$, la proiezione ortogonale del vettore $(-1,1)$ sulla retta di equazione cartesiana $x + y = 0$ è il vettore nullo. **V** | **F**

(9) La base $\{(1,1),(1,0)\}$ dello spazio $\mathbb{R}^2$ (dotato della metrica standard) è una base ortonormale. **V** | **F**

(10) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale. **V** | **F**

## Esercizî

(1) Si considerino i seguenti vettori $v_1 = (\pi,\pi,\pi), v_2 = (0,2,1), v_3 = (0,0,-1)$ di $\mathbb{R}^3$.
   (a) I vettori $v_1, v_2, v_3$ sono indipendenti? Formano una base?
   (b) Sia $F$ la trasformazione lineare tale che $F(e_1) = v_1, F(e_2) = v_2, F(e_3) = v_3$. Calcolare il valore di $F$ sul generico vettore $v = (x,y,z)$ e determina la matrice della trasformazione lineare $F$ rispetto alla base canonica.
   (c) $F$ è diagonalizzabile? (giustificare la risposta)

(2) Considerare il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,w) : x + y = 0 \text{ e } \ z + w = 0\}.$$

   (a) Dimostrare che l'insieme $U$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
   (b) Trovare la dimensione di $U$ e una sua base ortonormale.
   (c) Determinare il sottospazio complementare $U^\perp$ ed una sua base.

(3) Sia $A$ la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $F$ la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice $A$.
   (a) Determinare il valore di $F$ sul vettore $(1,2,1)$ e se il vettore $(1,1,1)$ appartiene all'immagine di $F$.
   (b) Determinare gli autovalori di $F$ ed i relativi auospazi.
   (SEGUE SUL RETRO)

(c) Determinare se $F$ è diagonalizzzabile. In caso affermativo indicare una base $B$ di autovettori, la matrice di $F$ rispetto a tale base e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B$.

(4) Dare la definizione di diagonalizzabilità di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e discutere la seguente affermazione:
*ogni trasformazione lineare da* $\mathbb{R}^n$ *in* $\mathbb{R}^n$ *è diagonalizzabile*
(dimostrandola o fornendo un controesempio).