(1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da:

$$F(x, y, z) = (x + 2y, x - y + z).$$

(a) Dopo aver determinato il valore di $F(e_1)$, $F(e_2)$ ed $F(e_3)$, dove e_1, e_2, e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^3$, scrivere la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica del dominio e del codominio.

(b) Trovare una base per il sottospazio vettoriale $Im(F)$ (sottospazio immagine della trasformazione lineare F). La trasformazione F è suriettiva?

(c) Determinare il sottospazio $Ker(F)$ (nucleo della trasformazione lineare F) e una sua base. La trasformazione è iniettiva?

(2) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare determinata da A rispetto alla base canonica per dominio e codominio, calcolare il valore di $F(1, 0, -1)$.

(b) Trovare gli autovalori della matrice A ed i relativi autospazi.

(c) La matrice A è diagonalizzabile? Se possibile, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori della matrice A.

(3) Dati k vettori $v_1, \ldots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$, dare la definizione del sottospazio $L(v_1, \ldots, v_n)$ generato da $v_1, \ldots, v_k$. I vettori $v_1, \ldots, v_k$ formano una base per $L(v_1, \ldots, v_n)$? Se si', fornire una dimostrazione, altrimenti un controesempio.