(1) Il sistema $\begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$ di due equazioni in una incognita x
ha due soluzioni. **V** | **F**

(2) La base $\{(1,1),(1,0)\}$ dello spazio $\mathbb{R}^2$ (dotato della metrica standard) è una base ortonormale. **V** | **F**

(3) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale. **V** | **F**

(4) Il nucleo di un'applicazione lineare è uno spazio vettoriale. **V** | **F**

(5) Esistono matrici di cambio base a determinante nullo. **V** | **F**

(6) L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **V** | **F**

(7) Un autospazio di una matrice quadrata può ridursi al solo vettore nullo. **V** | **F**

(8) Esistono matrici quadrate invertibili con determinante < 0. **V** | **F**

(9) Se una matrice quadrata è diagonalizzabile, allora il suo determinante non può essere nullo. **V** | **F**

(10) in un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale di dimensione uno esistono infiniti vettori non nulli; **V** | **F**

(11) due matrici quadrate simili hanno lo stesso determinante; **V** | **F**

(12) esistono matrici quadrate diagonali che non sono diagonalizzabili; **V** | **F**

(13) ogni matrice quadrata invertibile ammette una ed una sola inversa; **V** | **F**

(14) se l'$\mathbb{R}$-spazio vettoriale V è generato dai vettori v_1, v_2 e v_3, allora necessariamente V ha dimensione 3. **V** | **F**

(15) Una matrice quadrata a determinante < 0 è sempre invertibile. **V** | **F**

(16) Una matrice quadrata a determinante < 0 è sempre diagonalizzabile. **V** | **F**

(17) L'applicazione lineare identica $id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $id_{\mathbb{R}^2}(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}^2$, è rappresentata, rispetto alla base $\mathcal{B} := ((1,2),(1,0))$ di $\mathbb{R}^2$, dalla matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. **V** | **F**

(18) Lo spazio vettoriale nullo e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ sono sottospazî supplementari di $\mathbb{R}^2$. **V** | **F**

(19) Il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, y = 0\}$, è – con le operazioni indotte da $\mathbb{R}^2$ – un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. **V** | **F**

Esercizî

(1) Si consideri uno spazio vettoriale reale V di dimensione due e sia $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ una sua base. Sia $f\colon V \to V$ la trasformazione lineare di V che – rispetto alla base $\mathcal{B}$ – è espresso tramite la seguente matrice 2×2:

$$A := \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

(a) determinare autovalori e autospazî di f e mostrare che f è diagonalizzabile;
(b) scelta una base $\mathcal{B}'$ di autovettori di V, si trovi la matrice di cambio base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, e si determini inoltre l'inversa di questa matrice;
(c) trovare la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}'$, e mostrare esplicitamente che tale matrice è simile alla matrice A.

(2) Si considerino i seguenti vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

$$v_1 := (-1, 0, -1, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, 2, 0), \qquad v_3 := (-1, 1, 0, -2),$$

e sia $V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da questi vettori;
 (a) trovare una base ortonormale per V;
 (b) trovare una base del complemento ortogonale di V;
 (c) calcolare il valore dell'angolo tra v_1 e v_3.

(3) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$ si considerino i seguenti sottospazî vettoriali

$$V_1 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0\},$$
$$V_2 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

e sia $V_1 \cap V_2 =: V \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale intersezione di questi
 (a) Determinare la dimensione di V e dello spazio vettoriale $V_1 + V_2$;
 (b) trovare una base ortogonale di V;
 (c) trovare la proiezione ortogonale del vettore $(1, 1, 0, 0)$ su V.

(4) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ si consideri il seguente sottoinsieme

$$L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y = 2, x + y - z = 1\}.$$

 (a) Si dimostri che L è una retta affine, e se ne trovino le equazioni parametriche.