Esercizi su Matrici

(1) Siano A, B, C le seguente matrici, a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(nota: la matrice ${}^tB$ indica la trasposta della matice B, cioè la matrice ottenuta da B scambiando le righe con le colonne)
Quando possibile, calcola le espressioni sottoindicate.
Se non è possibile calcolarle, spiega il perché.
(a) $-2(A+B)C$;
(b) $-2C(A+B)$;
(c) $(A+^t B)^2$;
(d) $(A^tB)^2 - AC$.

(2) Considera il prodotto Av fra la matrice A dell'esercizio 1) e il vettore colonna

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Calcola Av utilizzando la definizione del prodotto fra matrici. Ricordando quanto visto a lezione, esprimi il vettore Av come combinazione lineare delle colonne di A.
Svolgi lo stesso esercizio se v è il vettore colonna

$$v =^t (2, 1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3) Se la quarta colonna d_4 della matrice D è

$$d_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice E ha la prima e la seconda colonna uguali, calcola la quarta colonna della matrice ED (ricorda che la quarta colonna della matrice ED è data dal vettore colonna Ed_4).

(4) Sia A la seguente matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Costruire una matrice B ancora 2×2 con due colonne b_1, b_2 diverse e non nulle tali che AB sia la matrice nulla. La matrice A è invertibile? La matrice B è invertibile?

(5) Sia $A_{n \times m}$ una matrice con colonne $a_1, \dots a_m$. Descrivere le colonne della matrice $C = AD$ dove dove D è:
(a) la matrice colonna $m \times 1$ con tutti i coefficienti uguali a 1;
(b) la matrice colonna $m \times 1$ con tutti i coefficienti uguali a k per un fissato $k \in \mathbb{R}$;

(c) la matrice quadrata $m \times m$ definita da

$$d_{i,j} = \begin{cases} 0 \text{ se } & i \neq j \\ i \text{ altrimenti} \end{cases}$$

(d) la matrice quadrata $m \times m$ con tutti i coefficienti uguali a 1;
(e) la matrice quadrata $m \times m$ con tutti i coefficienti uguali a k per un fissato $k \in \mathbb{R}$.

(6) Se A è una matrice $m \times n$ con righe $a_1, \ldots, a_m$ con $a_i \in R^n$ e B è una matrice $n \times p$, dimostra che l'i-esima riga della matrice AB è il vettore $a_i B$.

(7) Se A è una matrice $m \times n$ e v è un vettore colonna $n \times 1$ $v =^t (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ dimostra che

$$^t(Av) =^t v^t A$$

Più in generale, dimostra che $^t(AB) = B^t A^t$, quando il prodotto è possibile (suggerimento per il caso generale: confronta la prima riga della matrice $^t(AB)$ con la prima riga della matrice $B^t A^t$).

DOMANDE VERO/FALSO

(1) Se A è una matrice $m \times n$ con righe $a_1, \ldots, a_m$ con $a_i \in R^n$ e B è una matrice $n \times p$ con colonne $b_1, \ldots b_p$ con $b_i \in R^n$, allora

(a) la matrice AB ha per $i-$esima colonna il vettore $a_i b_i$; **V** | **F**
(b) la matrice AB ha per $i-$esima riga il vettore $a_i B$; **V** | **F**
(c) ogni colonna della matrice AB è una combinazione lineare di colonne di B; **V** | **F**
(d) ogni colonna della matrice AB è una combinazione lineare di colonne di A; **V** | **F**
(e) ogni riga della matrice AB è una combinazione lineare di colonne di A; **V** | **F**
(f) ogni riga della matrice AB è una combinazione lineare di righe di B. **V** | **F**