Esercizi su determinanti e matrice inversa

(1) Se A è una matrice quadrata, il determinante di A è uguale al rango di A; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(2) Se A, B sono matrici quadrate della stessa dimensione, allora $det(A+B) = det(A) + det(B)$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(3) Se $A = (a_{i,j})$ è una matrice quadrata e $a_{i,i} = 0$ per ogni i, allora $det(A) = 0$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(4) Se $A = (a_{i,j})$ è una matrice quadrata e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $det(\lambda A) = \lambda det(A)$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(5) Se il rango di una matrice 3×3 è uguale a 2, allora il determinante della matrice è zero; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(6) Se scambiamo due righe di una matrice quadrata il determinante non cambia; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(7) Se scambiamo due righe di una matrice il rango non cambia; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(8) Una matrice triangolare superiore è sempre invertibile ; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(9) Siano A e B matrici quadrate della stessa dimensione, descritte tramite le loro righe: $A = [a_1, \dots, a_n]$ e $B = [b_1, \dots, b_n]$.
Se $C = [a_1 + b_1, a_2, \dots, a_n]$ (dove $a_1 + b_1$ è la somma delle due righe) allora $det(A) + det(B) = det(C)$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(10) Se la matrice invertibile A viene ridotta tramite operazioni elementari alla matrice B, allora $A^{-1} = B^{-1}$. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$

(1) Considera la seguente matrice a coefficienti reali

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ -2 & 8 & -9 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calcola il determinante di A sia utilizzando lo sviluppo di Laplace che riducendo la matrice con operazioni elementari fino ad arrivare ad una matrice a scala.
(b) Qual è il rango di A?
(c) La matrice A è invertibile?
(d) Rispondi alle prime tre domande ma rispetto alla matrice

$$A' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(**Sol** $det(A) = -111$, $det(A') = -14$)

(2) Per ognuna delle matrici seguenti, calcola il determinante. Se la matrice è invertibile, calcola l'inversa nei due modi visti a lezione. Verifica i tuoi calcoli moltiplicando la supposta inversa per la matrice di partenza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

(**SOL**:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 1 \\ 7/2 & 3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(3) Data una matrice quadrata A con righe

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

e un numero reale λ trova una matrice M tale che

$$MA = \begin{bmatrix} a_1 + \lambda a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

(4) Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice quadrata diagonale (cioè tale che $a_{i,j} = 0$ per ogni $i \neq j$); se i coefficienti sulla diagonale sono non nulli, trova l'inversa di A.

(5) Se $A = (a_{i,j})$ è una matrice quadrata $n \times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ scrivi il determinante della matrice $\lambda A = (\lambda a_{i,j})$ in funzione del determinante della matrice A.

(6) Sia A una matrice quadrata di dimensione dispari tale che la matrice trasposta ${}^tA$ sia uguale alla matrice $-A$. Calcola il determinante di A.

(7) Dimostra che, se A è una matrice quadrata tale che la matrice trasposta ${}^tA$ è uguale alla matrice inversa A^{-1} allora $det(A) = 1$ oppure $det(A) = -1$.