Esercizi su equazioni parametriche e determinanti

(1) Dopo aver dimostrato che i tre punti $P = (2,0,1), Q = (1,0,3), R = (2,3,1)$ non sono allineati in $\mathbb{R}^3$, scrivere l'equazione parametrica della piano di $\mathbb{R}^3$ passante per i punti P, Q, R.

(Sugg: P, Q, R sono allineati in $\mathbb{R}^3 \Leftrightarrow P, Q, R$ appartengono ad uno spazio affine di dimensione 1 $\Leftrightarrow$ i vettori $P - Q$, $R - Q$ appartengono ad uno spazio vettoriale di dimensione 1.
Le equazioni parametriche sono, ad esempio

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda + \mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 4\lambda + 4\mu \end{cases}$$

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).

(2) Considera il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y - z = -3 \end{cases}$$

(a) Dimostra che il sistema ha soluzione, confrontando il rango della matrice dei coeefficienti con il rango della matrice orlata.

(b) Dimostra che l'insieme delle soluzioni del sistema $Sol(A,b)$ è uno spazio affine di dimensione 1, cioè una retta di $\mathbb{R}^3$. (Sugg. La dimensione di $Sol(A,b)$ è, per definizione, la dimensione del sottospazio vettoriale $Sol(A,0)$ che è anche $Ker(L_A)$ dove $L_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ è data da

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Inoltre la dimensione dell'immagine di L_A è ...)

(c) Utilizza il metodo di Gauss-Jordan per ridurre la matrice orlata del sistema ad una matrice a scala in forma ridotta (cioè in cui i pivots sono uguali a 1 e i coeffficienti sopra i pivots sono nulli). Utilizza la matrice ottenuta per scrivere le soluzioni del sistema in forma parametrica (equazione parametrica della retta). Utilizzando l'equazione parametrica, trova due punti distinti che appartengono alla retta. Verifica che i punti trovati sono soluzione del sistema lineare iniziale.

(**Sol** una possibile soluzione è:

$$\begin{cases} x = -4 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Due punti sulla retta si ottengono ad esempio con $\lambda = 0$: $P = (-4,-5,0)$ e con $\lambda = 1$: $Q = (-2,-2,1)$.)

(3) Come nell'esercizio precedente ma con il sistema dato dall'unica equazione

$$x - 2y + z = 3$$

(Nota bene: l'insieme delle soluzioni è ora uno spazio affine di dimensione 2, cioè un piano).

(4) Utilizzando solo le proprietà viste a lezione
(multilinearità, alternanza, $det[e_1, \dots, e_n] = 1$, dove $e_i \in \mathbb{R}^n$ - quindi $[e_1, \dots, e_n]$ è la matrice identità-, $det(A) = 0 \Leftrightarrow A$ ha colonne linearmente dipendenti)
trova i determinanti delle seguenti matrici di vettori colonna:
  (a) $A_1 = [2e_1 + e_2, e_2]$;
  (b) $A_2 = [e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3]$;
  (c) $A_3 = [ae_1, be_1 + ce_2, de_1 + ee_2 + fe_3] = \begin{pmatrix} a & b & d \\ 0 & c & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$;
  (d) Generalizzando l'esercizio precedente, calcola il determinante di una matrice $n \times n$ triangolare superiore, cioè una matrice $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,j} = 0$ se $i > j$.
  (e) Come sopra ma per matrici triangolari inferiori cioè una matrice $A = (a_{i,j})$ con $a_{i,j} = 0$ se $i < j$.

(5) Utilizzando solo la funzione determinante stabilisci se i seguenti insiemi ordinati di vettori formano una base dello spazio vettoriale corrispondente.
  (a) $(2e_1 + e_2, e_2)$ in $\mathbb{R}^2$;
  (b) $(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$ in $\mathbb{R}^3$;
  (c) $(e_1 + 2e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_3)$ in $\mathbb{R}^3$;
  (d) $(ae_1, be_1 + ce_2, de_1 + ee_2 + fe_3)$ in $\mathbb{R}^3$ (la soluzione dipenderà dal fatto che alcuni dei coefficienti siano o meno nulli…).