1 Esercizi sugli spazi euclidei

1. Calcola il prodotto scalare per ogni coppia dei seguenti vettori e determina l'angolo compreso fra i due vettori.

   (a) $v = (1, 0, 1), w = (0, 1, 0)$;

   (b) $v = (0, 1, 0), w = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$;

   (c) $v = (0, 1/3), w = (0, -1)$;

   (d) $v = (0, 1/2, 0), w = (1, \sqrt{3}, 0)$.

2. Si considerino i seguenti vettori dello spazio euclideo $\mathbb{R}^4$:

   $$v_1 := (-1, 0, -1, -1), \qquad v_2 := (-1, 0, 2, 0), \qquad v_3 := (-1, 1, 0, -2),$$

   e sia $W \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio vettoriale generato da questi vettori;

   (a) trovare una base del complemento ortogonale $W^\perp$ di W;

   (b) calcolare il valore dell'angolo tra v_1 e v_3.

3. In $\mathbb{R}^3$ trova l'equazione del piano passate per l'origine e perpendicolare alla retta generata dal vettore $w = (1, 2, -3)$.

4. In $\mathbb{R}^4$ trova l'equazione del complemento $W^\perp$ ortogonale al sottospazio vettoriale generato dai vettori $w_1 = (1, 0, -1, 1)$, $w_2 = (0, 1, -1, 1)$ (cioè, $W = L(w_1, w_2)$).

5. Dato il vettore $w = (1, 2, 3)$ di $\mathbb{R}^3$ trova la proiezione ortogonale del vettore $v = (1, 0, 1)$ sulla retta $L(w)$.

6. Considera la matrice

   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Se W è lo spazio generato dalle righe, trova $W^\perp$. Fai lo stesso con lo spazio generato dalle colonne della matrice A.