Domande VERO/FALSO

(1) L'insieme vuoto $\emptyset$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$. **V** | **F** F

(2) Esistono spazî vettoriali euclidei di dimensione finita che non ammettono una base ortonormale. **V** | **F** F

(3) Se una matrice quadrata $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ ha determinante nullo, allora è invertibile. **V** | **F** F

(4) Esistono vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita di norma nulla. **V** | **F** F

(5) L'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definita da $f(x, y) = (-y, -x)$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, è un isomorfismo lineare. **V** | **F** V

(6) L'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$. **V** | **F** V

(7) il sistema lineare $\begin{cases} x - y = 1 \\ 2y - 2x = -2 \end{cases}$ ha infinite soluzioni. **V** | **F** V

(8) Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^2$, la proiezione ortogonale del vettore $(-1, 1)$ sulla retta di equazione cartesiana $x + y = 0$ è il vettore nullo. **V** | **F** F

(9) La base $\{(1, 1), (1, 0)\}$ dello spazio $\mathbb{R}^2$ (dotato della metrica standard) è una base ortonormale. **V** | **F** F

(10) La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ è una matrice diagonale. **V** | **F** V

Esercizî

(1) Si considerino i seguenti vettori $v_1 = (\pi, \pi, \pi), v_2 = (0, 2, 1), v_3 = (0, 0, -1)$ di $\mathbb{R}^3$.
   (a) I vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti? Formano una base?
   (b) Sia F la trasformazione lineare tale che $F(e_1) = v_1, F(e_2) = v_2, F(e_3) = v_3$. Calcolare il valore di F sul generico vettore $v = (x, y, z)$ e determinare la matrice della trasformazione lineare F rispetto alla base canonica.
   (c) F è diagonalizzabile? (giustificare la risposta)

SOL. Il determinante della matrice colonna $[v_1, v_2, v_3]$ è diverso da zero, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e (poiché siamo in $\mathbb{R}^3$) formano anche una base.

$$F(x, y, z) = F(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xF(e_1) + yF(e_2) + zF(e_3) =$$

$$= xv_1 + yv_2 + zv_3 = (x\pi, x\pi, x\pi) + (0, 2y, y) + (0, 0, -z) = (x\pi, x\pi + 2y, x\pi + y - z).$$

La matrice M che rappresenta F rispetto alla base canonica ha come vettori colonna le coordinate dei vettori $F(e_1) = v_1$ (prima colonna), $F(e_2) = v_2$ (seconda colonna), $F(e_3) = v_3$ (terza colonna):

$$M := \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ \pi & 2 & 0 \\ \pi & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per vedere se F è diagonalizzabile, calcoliamone gli autovalori, utilizzando il polinomio caratteristico $p(\lambda) = det(M - \lambda I) = (\pi - \lambda)(2 - \lambda)(-1 - \lambda)$. Questo polinomio ha tre radici distinte. Quindi esistono tre autovalori distinti e F è diagonalizzabile.

(2) Considerare il seguente sottoinsieme dello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, w) : x + y = 0 \text{ e } \ z + w = 0\}.$$

(a) Dimostrare che l'insieme U è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
(b) Trovare la dimensione di U e una sua base ortonormale.
(c) Determinare il sottospazio complementare $U^\perp$ ed una sua base.

SOL. U è chiuso per somma: se $(x, y, z, w) \in U$ e $(x', y', z', w') \in U$, allora $x+y = z+w = x'+y' = z'+w' = 0$. Si ha $(x, y, z, w)+(x', y', z', w') = (x+x', y+y', z+z', w+w') \in U$, perché $(x+x')+(y+y') = (x+y)+(x'+y') = 0$ e $(z+z')+(w+w') = (z+w)+(z'+w') = 0$ e $(x, y, z, w)+(x', y', z', w') \in U$.

U è chiuso per prodotto per scalari: se $(x, y, z, w) \in U$ allora $x + y = z + w = 0$; se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora e $\lambda x + \lambda y) = \lambda z + \lambda w = 0$. Quindi $\lambda(x, y, z, w) \in U$.

Notiamo inoltre che U coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$$

La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Questa è giá una matrice a scala e, scegliendo dei parametri per le variabili che non sono pivots, ciè $y = k$, $w = h$ e semplificando otteniamo

$$\begin{cases} x = -k \\ z = -h \end{cases} \quad \text{per } h, k \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo quindi:

$$U = \{(-k, k, -h, h) : h, k \in \mathbb{R}\},$$

e $dim(U) = 2$.

Per trovare una base ortonormale, basta scegliere quindi due vettori di U che siano linearmente indipendenti e ortonormali. Ad esempio $u_1 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $u_1 = (0, 0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. Una base ortonormale di U è quindi (u_1, u_2).

Il sottospazio complementare di U è dato da:

$$U^\perp = \{(x, y, z, w) :< (x, y, z, w), u_1 >= 0, < (x, y, z, w), u_2 >= 0\} =$$
$$= \{(x, y, z, w) : -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} = 0, -z/\sqrt{2} + w/\sqrt{2} = 0\}$$

Quindi $U^\perp$ coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} = 0 \\ -z/\sqrt{2} + w/\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \text{o, equivalentemente, } \begin{cases} -x + y = 0 \\ -z + w = 0 \end{cases}$$

Poiché $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 4 e U ha dimensione 2, anche $U^\perp$ avrà dimensione 2. Per trovarne una base basterà allora trovare due vettori linearmente indipendenti in $U^\perp$, ad esempio $w_1 = (1, 1, 0, 0)$ e $w_2 = (0, 0, 1, 1)$.

Una base di $U^\perp$ è quindi (w_1, w_2).

(3) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sia F la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la cui matrice rispetto alla base canonica è la matrice A.

(a) Determinare il valore di F sul vettore $(1, 2, 1)$ e se il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene all'immagine di F.

(b) Determinare gli autovalori di F ed i relativi autospazi.

(c) Determinare se F è diagonalizzzabile. In caso affermativo indicare una base B di autovettori, la matrice di F rispetto a tale base e la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base B.

SOL

$$F(1, 2, 1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1/2F(1, 2, 1) = F(1/2, 1, 1/2),$$

quindi il vettore $(1, 1, 1)$ appartiene all'immagine di F.

Per determinare gli autovalori di F calcoliamo il polinomio caratteristico $p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^2(2 - \lambda)$.

Questo polinomio ha una radice $\lambda_1 = 0$ di moltiplicità algebrica pari a due, e una radice $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica pari a uno.

L'autospazio V_0 relativo all'autovalore 0 coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema

$\begin{cases} x = 0 \end{cases}$ quindi $V_0 = \{0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$ e V_0 ha dimensione 2.

L'autospazio V_2 relativo all'autovalore 2 ha sicuramente dimensione 1 (la molteplicità geometrica non può superare la molteplicità algebrica) e coincide con le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x = y \\ x = z \end{cases}$$

quindi $V_2 = \{x, x, x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Poiché la molteplicità algebrica e la geometrica di ogni autovalore sono uguali, la F è diagonalizzabile. Una base $B = (v_1, v_2, v_3)$ di autovettori si ottiene considerando due vettori indipendenti v_1, v_2 in V_0 e un vettore non nullo in V_2, ad esempio: $B = ((0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1))$. La matrice di F rispetto a tale base è

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base B, è la matrice che ha come prima colonna il vettore $[e_1]_B$, come seconda colonna il vettore $[e_2]_B$ e come terza colonna il vettore $[e_3]_B$.

Poiché, come si vede facilmente, $e_1 = -v_1 - v_2 + v_3$, $e_2 = v_1$, $e_3 = v_2$, la matrice del cambiamento di base, dalla base canonica alla base B è

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(4) Dare la definizione di diagonalizzabilità di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e discutere la seguente affermazione:

ogni trasformazione lineare da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile

(dimostrandola o fornendo un controesempio).

Una trasformazione lineare $F : V \to V$ si dice diagonalizzabile se esiste una base B rispetto alla quale la matrice $M_B^B(F)$ è una matrice diagonale. Equivalentemente, F è diagonalizzabile se esiste una base dello spazio V formata da autovettori.

L'affermazione è falsa. Ad esempio, la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (y, -x)$ non è diagonalizzabile. Infatti F non possiede autovettori (e, quindi, neanche una base di autovettori): se $F(x, y) = \lambda(x, y)$ allora $(y, -x) = (\lambda x, \lambda y)$; l'unica soluzione possibile è $(x, y) = (0, 0)$. Ma il vettore nullo non può essere un autovettore.