

1. TRASFORMAZIONI LINEARI E SISTEMI LINEARI

- (1) Sia $L_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

- (a) Trova la dimensione degli spazi vettoriali $Im(L_A), Ker(L_A)$.
 (b) Trova una base per i sottospazi vettoriali $Im(L_A)$ (sottospazio di $\mathbb{R}^2$) e $Ker(L_A)$ (sottospazio di $\mathbb{R}^3$).
 (c) Verifica che il sistema

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ha soluzione, confrontando il rango della matrice A dei coefficienti con il rango della matrice orlata

$$[A, b] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix},$$

dove $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, è il vettore colonna dei termini noti.

- (d) Determina la dimensione dello spazio affine delle soluzioni $Sol(A, b)$ del sistema, stabilendo se è un punto, una retta oppure un piano di $\mathbb{R}^3$.
 (e) Descrivi l'insieme delle soluzioni $Sol(A, b)$.
(Soluzioni $dim(Im(L_A)) = 2, dim(Ker(L_A)) = 1, Sol(A, b)$ è una retta di $\mathbb{R}^3$, $Sol(A, b) = \{(1 - t, -3/2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

- (2) Per ognuno dei sistemi lineari seguenti, determina se il sistema ammette soluzione; per tutti i sistemi che hanno soluzione, determina la dimensione dello spazio affine $Sol(A, b)$ delle soluzioni ed usa il metodo di eliminazione di Gauss per descrivere esplicitamente l'insieme delle soluzioni.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

(non ha soluzioni)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 28 \\ 4x_1 + 9x_2 - x_3 = 14 \end{cases}$$

(un'unica soluzione $(-2, 3, 5)$).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 9x_5 = 3 \end{cases}$$

$(Sol(A, b) = \{(1, 2k, k, -3h, h) : k, h \in \mathbb{R}\})$