

COGNOME _____ NOME _____
 CORSO DI LAUREA

INF	TWM
-----	-----

 ANNO DI IMMATRICOLAZIONE _____
 MATRICOLA _____

SCRITTO MATEMATICA DISCRETA
SECONDA PARTE, 31/01/2013

Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. Le risposte date vanno sempre giustificate.

Esercizi

- (1) Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Calcolare il determinante della matrice ed il suo rango. I vettori riga della matrice sono linearmente indipendenti? Qual è la dimensione del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dalle righe di A ?
- (b) Dimostrare che tutti i vettori del tipo $(k, 0, -k)$, per $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sono autovettori di A rispetto all'autovalore $\lambda = 0$. La matrice ha altri autovalori? Se sì, quali sono?
- (c) Considerato il sistema non omogeneo dato dall'equazione matriciale

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

determinarne l'insieme delle soluzioni e la sua dimensione.

- (d) Dimostrare che, in generale, se una matrice quadrata A di tipo $n \times n$ ha un autovalore nullo, allora il rango di A è minore di n .

SOLUZIONI

- (a) Poiché la terza colonna è uguale alla prima, i tre vettori colonna sono dipendenti e il rango è minore o uguale a 2 (per definizione, il rango è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti). Poiché le prime due colonne sono indipendenti (non essendo una multipla dell'altra) il rango è due. Poiché il rango indica anche il massimo numero di righe indipendenti, abbiamo che la dimensione dello spazio delle righe è due.
- (b) Basta verificare che

$$A \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si ha

$$A \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Poiché il vettore $(k, 0, k)$ è non nullo, ne segue che $(k, 0, k)$ è un autovettore con autovettore 0.

- (c) Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico, ovvero del polinomio

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ \lambda & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

(dove la prima colonna è stata sostituita dalla somma della prima e della terza colonna). Sviluppando secondo la prima colonna otteniamo:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -\lambda(1-\lambda)^2 + \lambda(2 - (1-\lambda)) = -\lambda[(1-\lambda)^2 - 1 - \lambda] = \\ &= -\lambda[1 + \lambda^2 - 2\lambda - 1 - \lambda] = -\lambda[\lambda^2 - 3\lambda] = -\lambda^2(\lambda - 3) \end{aligned}$$

Le radici del polinomio (quindi gli autovalori di A) sono $\lambda = 0$ e $\lambda = 3$.

- (d) Consideriamo la matrice orlata e riduciamola a scala:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scelto come parametro $z = t$, dalla seconda riga otteniamo $y = 0$ e dalla prima riga $x = 1 - t$. L'insieme delle soluzioni è quindi

$$SOL = \{(1-t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

ed ha dimensione uno.

- (e) Data una matrice quadrata A di dimensione n che ha un autovalore nullo, sia $v \neq 0$ un autovettore relativo a tale autovalore. Poiché $Av = 0v = 0$ il vettore v appartiene al nucleo della trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definita da $F(v) = Av$. Quindi la dimensione di $Ker(F)$ è maggiore di 0. Poiché inoltre si ha

$$\dim(Ker(F)) + \dim(Im(F)) = n$$

avremo che la dimensione dell'immagine di F , che è anche il rango di A , è minore di n .

- (2) Sia $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y) = (x + y, x - y, 2x).$$

- Determinare la dimensione dei sottospazi $Ker(F)$ e $Im(F)$ e, se possibile, un vettore che non appartiene a $Im(F)$. Determinare se F è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
- Determinare la matrice M che rappresenta F rispetto alle basi canoniche per dominio e codominio.
- Dati i vettori $v_1 = (1, 1, 2)$, $v_2 = (0, 0, -1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$, dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica per il dominio e alla base B per il codominio.
- Data una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, dimostrare che se k vettori $v_1, v_2, \dots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti, allora anche le loro immagini $F(v_1), \dots, F(v_k)$ sono dipendenti in $\mathbb{R}^m$.

SOLUZIONI

- (a) Un vettore (x, y) appartiene a $Ker(F)$ se e solo se

$$F(x, y) = (x + y, x - y, 2x) = (0, 0, 0).$$

Ne ricaviamo $x = y = 0$, quindi l'unico vettore nel $\text{Ker}(F)$ è il vettore nullo e la trasformazione lineare è iniettiva. Poiché il codominio ha dimensione 3 e il dominio ha dimensione 2, la trasformazione lineare non può essere suriettiva; da $\dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F)) = 2$ segue che l'immagine ha dimensione 2. Un vettore che non appartiene all'immagine è, ad esempio, $(1, 1, 0)$: se esistesse (x, y) con $F(x, y) = (x + y, x - y, 2x) = (1, 1, 0)$ si avrebbe $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$, una contraddizione. F non è biunivoca perché non è suriettiva.

- (b) La matrice M ha come colonne le coordinate dei vettori $F(e_1), F(e_2)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (c) Consideriamo la matrice che ha come righe le coordinate dei vettori $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (0, 0, -1), v_3 = (1, 0, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sviluppando secondo la seconda riga, vediamo che il determinante di questa matrice è -1 . Quindi i vettori v_1, v_2, v_3 sono linearmente indipendenti e quindi $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$. La matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica per il dominio e alla base B per il codominio si ottiene considerando come colonne le coordinate dei vettori $F(e_1), F(e_2)$ rispetto alla base B . Poiché $F(e_1) = v_1, F(e_2) = -v_1 + 2v_3$ tali coordinate sono, rispettivamente: $(1, 0, 0), (-1, 0, 2)$ e la matrice richiesta è:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- (d) Se $v_1, v_2, \dots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono dipendenti, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ reali non tutti nulli, tali che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \vec{0}$ (dove $\vec{0}$ è il vettore nullo). Applicando la trasformazione F otteniamo, per linearità,

$$F(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k) = \lambda_1 F(v_1) + \dots + \lambda_k F(v_k) = F(\vec{0}) = \vec{0}.$$

Quindi anche i vettori $F(v_1) \dots F(v_k)$ sono dipendenti.