SIMULAZIONE SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE

Domande VERO/FALSO

(1) Ogni matrice quadrata di ordine n a coefficienti reali ed invertibile ha rango n; **V** | **F** V

(2) i vettori $u = (1, 4, 1)$, $v = (-1, 0, -1)$, $w = (0, 2, 0)$ sono linearmente indipendenti; **V** | **F** F

(3) la funzione $F : R^2 \to R^2$ definita da $F(x, y) = (x^2, y^2)$ è lineare **V** | **F** F

(4) ogni insieme di n vettori linearmente indipendenti genera $\mathbb{R}^n$ **V** | **F** V

(5) se $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono linearmente dipendenti, esiste un v_i che è combinazione lineare degli altri vettori; **V** | **F** V

(6) se A, B sono matrici $n \times n$ a coefficienti reali allora $AB = BA$. **V** | **F** F

(7) se F è una trasformazione lineare dallo spazio vettoriale reale V allo spazio vettoriale reale W, si ha $dim(Ker(F)) = dim(Im(F))$. **V** | **F** F

(8) se una matrice $n \times n$ a coefficienti reali ha almeno un autovalore è diagonalizzabile; **V** | **F** F

(9) se il prodotto scalare fra due vettori è zero, i vettori sono dipendenti; **V** | **F** F

(10) Il vettore $(2, 1)$ ha coordinate $(1, 1)$ rispetto alla base $((1, 1), (1, 0))$ di $\mathbb{R}^2$. **V** | **F** V

Esercizî

(1) Considerata la base canonica $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ di $\mathbb{R}^3$, siano

$$u_1 = e_1 + e_2,\ u_2 = e_1 - e_2,\ u_3 = e_3.$$

(a) Dimostrare che $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$; determinare le coordinate del vettore $(1, 1, 1)$ rispetto a tale base.

(b) Determinare la matrice del cambiamento di base (dalla base canonica alla base $(u_1,\ u_2,\ u_3)$).

(c) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

(rispetto alla base $(e_1,\ e_2,\ e_3)$ per dominio e codominio).

Determinare i vettori $F(u_1), F(u_2), F(u_3)$ e calcolare le loro coordinate rispetto alla base $(u_1,\ u_2,\ u_3)$;

(d) Determinare la matrice B di F rispetto alla base $(u_1\ u_2\ u_3)$ (per dominio e codominio).

SOLUZIONE Consideriamo la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori u_1, u_2, u_3 rispetto alla base canonica, cioè

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

tale matrice ha determinante non nullo, quindi i vettori u_1, u_2, u_3 sono linearmente indipendenti e tre vettori indipendenti di $\mathbb{R}^3$ formano sempre una base.

Il vettore $(1,1,1)$ ha coordinate $(1,0,1)$ rispetto a tale base: infatti $u_1 + u_3 = (1,1,1)$.

Lo stesso risultato si può ottenere trovando la matrice del cambiamento di base dalla base canonica alla base $B = (u_1\ u_2\ u_3)$; questa matrice si ottiene considerando la matrice che ha come colonne le coordinate dei vettori della base canonica nella nuova base.

Tale matrice è quindi la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e possiamo anche controllare che il prodotto

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dia il risultato trovato prima, cioè $(1,0,1)$.)

Poiché:
$F(u_1) = Au_1 = (0,0,1) = u_3$,
$F(u_2) = Au_2 = (1,-1,0) = u_2$,
$F(u_3) = Au_3 = (1,1,0) = u_1$,
le coordinate di $F(u_1), F(u_2), F(u_3)$ rispetto alla base B sono, rispettivamente $(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)$, e la matrice di F rispetto alla base B per dominio e codominio è:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Sia A la seguente matrice a coefficienti reali:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Stabilire se la matrice A ammette un'inversa. In caso positivo, determinare l'inversa.
(b) Se $F : C \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare rappresentata dalla matrice A rispetto alla base canonica, determinare se F è invertibile; in caso positivo, determinare la trasformazione inversa.
(c) Determinare $Im(F)$ e $Ker(F)$ (l'immagine e il nucleo della trasformazione lineare F).

SOLUZIONE La matrice ha determinante positivo, quindi ammette un'inversa, calcolabile con uno dei metodi visti a lezione. Fatti i calcoli, si trova che matrice inversa è

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(nota bene, nel compito ci dovrebbero essere anche i calcoli...)

F è invertibile e la trasformazione inversa è data da

$$F^{-1}(x, y, z) = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x + y \\ 4x - 2y + z \end{pmatrix}$$

Poiché F è invertibile, è iniettiva e suriettiva, Ne segue che l'immagine di F è tutto $\mathbb{R}^3$ mentre $Ker(F)$ è il sottospazio nullo (quello che contiene solo il vettore nullo).

(3) Sia dato il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + y = -1 \\ x + 8y - 5z = 2 \\ x + 5y - 3z = 1 \end{cases}$$

(a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa del sistema;
(b) determinare se il sistema ammette soluzioni; in caso affermativo descrivere lo spazio affine delle soluzioni;
(c) se il sistema ammette soluzioni, determinare se l'insieme delle soluzioni è un punto, una retta oppure un piano e le sue equazioni parametriche.

(4) Dare la definizione di autovalore e autovettore di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ e discutere la seguente affermazione:

la trasformazione lineare F è diagonalizzabile se e solo se esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori

dimostrandola o fornendo un controesempio.