COGNOME | NOME
CORSO DI LAUREA $\boxed{\textbf{INF}}\boxed{\textbf{TWM}}$ | ANNO DI IMMATRICOLAZIONE
MATRICOLA

MDII 20/07/2012

Per ottenere la sufficienza bisogna rispondere in modo corretto ad almeno 7 domande della parte V/F e risolvere correttamente due esercizi della seconda parte. Scrivere subito il vostro nome, cognome e numero di matricola; tenere il libretto universitario sul banco. La durata della prova è di 3 ore.

Esercizi

(1) Si consideri la seguente matrice 3×3

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Rispondere alle seguenti domande, giustificando adeguatamente le risposte.

(a) Determinare gli autovalori della matrice A e la loro molteplicità algebrica.
(b) Determinare gli autospazi relativi agli autovalori di A e la loro dimensione.
(c) Determinare se la matrice A è diagonalizzabile e se esiste una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.
(d) Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è la trasformazione lineare rappresentata da A rispetto alla base canonica per dominio e codominio ed $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, determinare il valore di $F(x, y, z)$ e la dimensione dei sottospazi $Ker(F)$ e $Im(F)$.

SOL

(a) Si ha $det(A - \lambda I) = -\lambda^3$, quindi A ha un solo autovalore $\lambda = 0$ di molteplicità algebrica uguale a 3.
(b) L'autospazio è dato dalle soluzioni del sistema $A - 0I = 0$ e cioè:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema precedente formano l'autospazio $V_0 = \{(x, y, z) : x \in \mathbb{R}, y = 0, z = 0\}$ che h dimensione 1. La molteplicità geometrica dell'autovalore è quindi 1.
(c) Poiché esiste un autovalore per cui la molteplicità algebrica è diversa dala molteplicità geometrica, la matrice A non è diagonalizzabile e, di conseguenza, non ammette neanche una base di autovettori.
(d) Si ha

$$F(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ 0 \end{pmatrix}$$

La dimensione di $Im(F)$ è uguale al rango di A, cioè 2. La dimensione del $ker(F)$ si ricava dall'equazione $dim(Ker(F)) + dim(Im(F)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ ottenendo $dim(Ker(F) = 1$.

(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x, x + y + z).$$

(a) Determinare la matrice M che rappresenta F rispetto alla base $B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ per il dominio e alla base canonica per il codominio.
(b) Determinare se F è iniettiva, suriettiva o biunivoca.
(c) Dimostrare che $B' = \{(1,1,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e trovare la matrice $M_{B'}^{B}(id)$ del cambiamento di base da B a B'.
(d) Se M' è la matrice di F rispetto alla base B' per il dominio e alla base canonica per il codominio, che relazione c'è fra M, M' e $M_{B'}^{B}(id)$?

SOL

(a) La matrice M ha per i-esima colonna le coordinate del vettore $F(v_i)$ rispetto alla base canonica, dove $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (0,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$. Poiché $F(v_1) = (1,2)$, $F(v_2) = (0,1)$ e $F(v_3) = (0,2)$, la matrice M è uguale a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) La dimensione dell'immagine di F è uguale al rango di M ed è quindi 2. La funzione è quindi suriettiva. Ricaviamo la dimensione del $Ker(F)$ utilizzando l'equazione $dim(Ker(F)) + dim(Im(F)) = dim(\mathbb{R}^3) = 3$ e ottenendo $dim(Ker(F)) = 1$. La trasformazione non è quindi iniettiva (altrimenti la dimensione del $JKer(F)$ sarebbe uguale a zero).

(c) Il determinante della matrice che ha per righe i oefficienti dei vettori della base è non nullo, quindi i vettori sono linearmente indipendenti e, visto che la dimensione dello spazio è 3, formano una base. La matrice $M_{B'}^{B}(id)$ del cambiamento di base da B a B' ha come i-esima colonna le coordinate dell'iesimo vettorre della base B nella base B'. Se $B = (v_1, v_2, v_3)$ e $B' = (v_1', v_2', v_3')$ si ha: $v_1 = v_3'$, $v_2 = v_2'$, $v_3 = v_1' + v_2' - v_3'$. Ne segue: Poiché si ottiene:

$$M_{B'}^{B}(id) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) $M' = M(M_{B'}^{B}(id))^{-1}$.

(3) Considerare il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare il sottospazio affine delle soluzioni del sistema. Questo insieme è anche uno spazio vettoriale?
(b) Determinare la dimensione dello spazio affine di cui al punto precedente.

SOL

(a) Poiché il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice completa, il sistema ammette soluzioni. Inoltre, la matrice completa del sistema si riduce a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

che equivale al sistema

$$\begin{cases} x + y - z = -1 \\ -y + 2z = 3 \\ 6z = 5 \end{cases}$$

Ricavando z dall'ultima equazione, sostituendolo nella seconda per ricavare y ed infine sostituendo i valori trovati nella prima equazione otteniamo un'unica soluzione (x, y, z) con $x = 7/6, y = -4/3, z = 5/6$. L'insieme delle soluzioni non è uno spazio vettoriale perché il sistema non è omogeneo (quindi, in particolare, il vettore nullo non appartiene all'insieme delle soluzioni).

(b) Poiché lo spazio affine delle soluzioni contiene un unico punto, la dimensione è 0.

(4) Dare la definizione di nucleo di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ($Ker(F)$) e discutere la seguente affermazione:

la trasformazione F è iniettiva se e solo se $dim(Ker(F)) = 0$

dimostrandola o fornendo un controesempio.

SOL

$$Ker(F) = \{v \in \mathbb{R}^n : F(v) = \vec{0}\}$$

L'affermazione è corretta.

Se F è iniettiva, l'unico vettore che ha come immagine il vettore $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$ è il vettore nullo di $\mathbb{R}^n$; quindi $Ker(F) = \{\vec{0}\}$.

Viceversa, se $dim(Ker(F)) = 0$ allora $Ker(F) = \{\vec{0}\}$. Se $F(v) = F(w)$ allora $F(v - w) = \vec{0}$ e $v - w \in Ker(F)$. Ne segue $v - w = \vec{0}$ e quindi $v = w$. Questo dimostra che F è iniettiva.

(5) Sia W il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = (1, 0, 1, 0) \quad v_2 = (0, 1, 0, 1) \quad v_3 = (1, 1, 1, 1).$$

RISPONDERE ALLLE DOMANDE (a), (b) SE NEL PROGRAMMA SEGUITO CI SONO GLI SPAZI EUCLIDEI;
IN CASO CONTRARIO RISPONDERE ALLE DOMANDE (c), (d).

(a) Determinare il sottospazio $W^\perp$.
(b) Trovare una base per W e una base per $W^\perp$.
(c) Determinare un vettore che non appartiene a W e descrivere i vettori che appartengono a W.
(d) Trovare una base per W.
(a) Poiché il vettore v_3 dipende da v_1, v_2 si ha

$$W^\perp = \{v \in \mathbb{R}^4 :< v, v_1 >=< v.v_2 >= 0\} =$$

$$= \{(x, y, z, w) : x + z = 0, y + w = 0\} = \{(x, y, -x, -y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Una base per W è data dai vettori v_1, v_2 (in quanto il vettore v_3 dipende dai primi due, mentre v_1, v_2 sono linearmente indipendenti). Una base per $W^\perp$, che ha anch'esso cardinalità due (la somma della dimensione di W più la dimensione di $W^\perp$ deve essere 4) si ottiene considerando due vettori linearmente indipendenti qualsiasi in $W^\perp$, ad esempio $B = (w_1, w_2)$ dove $w_1 = (1, 0, -1, 0), w_2 = (0, 1, 0, -1)$.
(c) Si ha $W = L(v_1, v_2) = \{(x, y, x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Il vettore $(1, 0, 0, 0) \notin W$.
(d) Vedi 5 (b),