SCRITTO DI MATEMATICA DISCRETA, SECONDA PARTE, 20/06/2012

Domande VERO/FALSO

(1) La funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $F(x, y) = x$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è una trasformazione lineare; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

(2) se $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è definita da $F(x, y) = (y, x)$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ allora $dim(Ker(F)) = 0$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

(3) il sottospazio generato dai i vettori $v_1 = (1, 1), v_2 = (-2, -2)$ ha dimensione 1 in $\mathbb{R}^2$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

(4) le soluzioni del sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

(5) il prodotto scalare fra due vettori non nulli è sempre un numero positivo; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

(6) una matrice diagonalizzabile ha almeno un autovalore; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

(7) In $\mathbb{R}^3$ esistono due sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di dimensione 2 tali che $U_1 \cap U_2 = \{(0, 0, 0)\}$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

(8) $n + 1$ vettori sono sempre linearmente dipendenti in $\mathbb{R}^n$; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

(9) se una trasformzione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è diagonalizzabile, allora è anche invertibile; $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ F

(10) Se $v \in \mathbb{R}^n$ e A è una matrice $m \times n$, il vettore $Av \in \mathbb{R}^m$ è una combinazione lineare delle colonne di A. $\boxed{\mathbf{V}}\boxed{\mathbf{F}}$ V

Esercizî

(1) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codominio, è rappresentata dalla seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Determinare il valore di F sul generico vettore (x, y, z) del dominio.
(b) Determinare la dimensione dell'immagine $Im(F)$ di F e la dimensione del nucleo $Ker(F)$ di F.
(c) Determinare una base per l'immagine di F e, se possibile, un vettore che non appartiene a tale immagine.
(d) Siano $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1)$ e $v_3 = (0, 1, 0)$. Dimostrare che $B = (v_1, v_2, v_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e determinare la matrice di F rispetto alla base B per il dominio e la base canonica per il codominio.

SOL.

$$F(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y \\ x \end{pmatrix}$$

L 'immagine di F è generata dai vettori colonna di A e la dimensione dell'immagine è uguale al rango di A, cioè 3. Poiché vale

$$dim(Ker(F)) + dim(Im(F)) = 3$$

segue che $dim(Ker(F)) = 0$.

Il vettore $(1, 0, 0, 0)$ non appartiene all'immagine: infatti, dall'equazione $F(x, y, z) = (x+y+z, x+y+z, x+y, x)$. si vede che se un vettore appartiene all'immagine allora la sue prime due coordinate coincidono.

La matrice che ha per vettori colonna i vettori v_1, v_2, v_3 ha determinante non nullo, quindi i tre vettori sono indipendenti e formano una base di $\mathbb{R}^3$.

La matrice di F rispetto alla base B per il dominio e alla base canonica per il codominio, si ottiene considerando come vettori colonna i vettori $F(v_1) = (2, 2, 2, 1),\ F(v_2) = (2, 2, 1, 1),\ F(v_3) = (1, 1, 1, 0)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) Sia $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (y, x, 0).$$

(a) Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla l base canonica per dominio e codominio.
(b) Determinare gli autovalori di F e la loro molteplicità algebrica.
(c) Per ogni autovalore, determinare il relativo autospazio e la sua dimensione.
(d) Determinare se F è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori per F.

SOL. La matrice si ottiene considrando come colonne i vettori $F(e_1), F(e_2), F(e_3)$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico si ottiene considerando il determinante della matrice $A - \lambda I$:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1)$$

Gli autovalori di F sono le radici del polinomio caratteristico, cioè $0, 1, -1$. La molteplicità algebrica di ogni autovalore è 1, che è anche la loro molteplicità geometrica (cioè la dimensione degli autospazi corrispondenti). L'autospazio V_0 dell'autovalore 0 è dato da

$$V_0 = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = (0, 0, 0)\} = \{(x, y, z) : x = 0, y = 0\} = \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R}\};$$

L'autospazio V_1 dell'autovalore 1 è dato da

$$V_1 = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = (x, y, z)\} = \{(x, y, z) : (y, x, 0) = (x, y, z)\} = \{(x, y, z) : x = y, z = 0\};$$

L'autospazio V_1 dell'autovalore 1 è dato da

$$V_{-1} = \{(x, y, z) : F(x, y, z) = -(x, y, z)\} = \{(x, y, z) : (y, x, 0) = (-x, -y, -z)\} = \{(x, y, z) : x = -y, z = 0\}.$$

Una base di autovettori si ottiene prendendo un vettore non nullo in ogni autospazio, ad esempio $B = (v_1, v_2, v_3)$ dove $v_1 = (0, 0, 1), v_2 = (1, 1, 0), v_3 = (1, -1, 0)$.

(3) Sia dato il sistema lineare su $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y + z = -1 \\ 2x + 4y + 3z = 3 \\ 3x + 6y + 4z = 2 \end{cases}$$

(a) Determinare il rango della matrice dei coefficienti e quello della matrice completa del sistema;
(b) determinare se il sistema ammette soluzioni; in caso affermativo descrivere lo spazio affine delle soluzioni;
(c) se il sistema ammette soluzioni, determinare se l'insieme delle soluzioni è un punto, una retta oppure un piano e le sue equazioni parametriche.

SOL. La matrice completa del sistema è

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ed ha rango 2, come la matrice dei coefficienti del sistema. Il sistema ha quindi soluzione. Riducendo a scala la matrice completa otteniamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'unica variabile che non è un pivots è y che uguagliamo ad un parametro k. Lo spazio afffine delle soluzioni è dato da $S = \{(-6 - 2k, k, 5) : k \in \mathbb{R}\}$ ed è una retta di $\mathbb{R}^3$.

(4) Dare la definizione di rango di una trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e discutere la seguente affermazione:

fissata una base per il dominio ed una per il codominio, se la matrice di F rispetto a queste basi ha tutte le colonne uguali, allora il rango di F è 1.

dimostrandola o fornendo un controesempio.

SOL. il rango di una trasformazione lineare è la dimensione dell'immagine della funzione. L'affermazione è corretta solo se si aggiunge l'ipotesi che le colonne non siano nulle (altrimenti si ha la matrice nulla e la funzione manda ogni vettore nel vettore nullo: in questo caso il rango di F è zero).

In ogni caso. le colonne della matrice di F rispetto alle basi date generano l'immagine di F. Se la colonna è non nulla, quindi, l'immagine è generata da un vettore non nullo ed ha dimensione uno.