

1. ANCORA SISTEMI E REGOLA DI CRAMER

- (1) Risolvi il seguente sistema utilizzando la Regola di Cramer

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = -1 \\ -x - y - z = 1 \end{cases}$$

- (2) Considera il sistema

$$\begin{cases} x & & + & z = 2 \\ & y & + & z = 2 \\ x & + & y & + 2z = 4 \end{cases}$$

- (a) determina se il sistema ha almeno una soluzione e, se ne ha, la dimensione dello spazio affine delle soluzioni del sistema;
- (b) determina la dimensione del nucleo ($\text{Ker}(L_A)$) e dell'immagine della trasformazione L_A , dove A è la matrice dei coefficienti del sistema;
- (c) rispondi alle domande precedenti cambiando la colonna dei termini noti in

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. AUTOVETTORI E AUTOVALORI

- (1) Sia $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x + z, -y, x - z)$$

- (a) Stabilisci quali dei seguenti vettori sono autovettori per F . In caso di risposta affermativa, indica anche l'autovalore corrispondente.

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 0).$$

- (b) Trova la matrice A che rappresenta F rispetto alla base canonica del dominio e codominio;
 - (c) Trova gli autovalori della matrice A . La matrice è diagonalizzabile? Se sì, qual è la matrice diagonale che rappresenta la trasformazione lineare F ? (nota bene: visto che A non è diagonale, l'eventuale matrice diagonale rappresenterà F rispetto ad una nuova base, non rispetto alla base canonica).
- (2) Si consideri l'applicazione lineare $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ espressa, rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$, dalla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Si stabilisca se esiste una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$ per cui F si esprime come una matrice diagonale, e si trovi – se esiste – tale matrice diagonale;
 (b) tale base, se esiste, è unica?

3. ESERCIZI V / F DI PREPARAZIONE ALL'ESAME

- (1) L'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V	F
---	---
- (2) Un autospazio di una matrice quadrata può ridursi al solo vettore nullo.

V	F
---	---
- (3) una matrice invertibile è sempre diagonalizzabile.

V	F
---	---
- (4) una matrice diagonalizzabile è sempre invertibile.

V	F
---	---
- (5) Esistono matrici quadrate invertibili con determinante negativo.

V	F
---	---
- (6) Esistono matrici quadrate invertibili con determinante nullo.

V	F
---	---
- (7) Se una matrice quadrata è diagonalizzabile, allora il suo determinante non può essere nullo.

V	F
---	---
- (8) Un autovalore di una matrice non è mai nullo.

V	F
---	---
- (9) Un autovettore di una matrice non è mai il vettore nullo.

V	F
---	---
- (10) Dato uno spazio vettoriale reale V di dimensione tre, possono esistere suoi sottospazi vettoriali reali W_1 e W_2 di dimensione due la cui intersezione $W_1 \cap W_2$ è un sottospazio vettoriale di dimensione zero.

V	F
---	---
- (11) L'immagine di un'applicazione lineare non può essere mai uno spazio vettoriale.

V	F
---	---
- (12) Il determinante della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ è uguale a sei.

V	F
---	---
- (13) Esistono matrici quadrate $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ tali che $\det(A^t A) \neq \det({}^t A A)$.

V	F
---	---
- (14) La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile sui reali.

V	F
---	---

4. ESERCIZI SPARSI DI PREPARAZIONE ALL'ESAME

- (1) Si considerino le seguenti matrici

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_\ell := \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\ell \\ 0 & -1 & 0 \\ -\ell & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dove ℓ è un parametro reale.

- (a) Dopo aver mostrato che A è una matrice invertibile, si determini A^{-1} ;
 (b) Trovare i valori di ℓ per cui B_ℓ è invertibile;

- (2) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 2 e sia $\mathcal{B} := (v_1, v_2)$ una sua base. Si consideri l'applicazione lineare $f: V \rightarrow V$ definita da

$$f(v_1) := v_1 + 2v_2 \qquad f(v_2) := 3v_1 + 7v_2.$$

- (a) Si determini la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}$.
 - (b) Si determini la matrice di f rispetto alla base $\mathcal{B}' = (v_1 + v_2, 2v_1 + v_2)$.
 - (c) Si determini la matrice di cambio base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$, nonché la sua inversa.
- (3) Si consideri l'applicazione $\psi: \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ – dove $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$ denota lo spazio vettoriale dei polinomi di grado al più tre – data da $\psi(P) := P' - P''$, dove P' e P'' denotano, rispettivamente, la derivata prima e la derivata seconda del polinomio P (ovvero se $P = ax^3 + bx^2 + cx + d$, allora $P' = 3ax^2 + 2bx + c$ e $P'' := (P')'$).
- (a) L'applicazione ψ è lineare? In tale caso determinare la matrice associata a ψ rispetto alla base canonica $(1, x, x^2, x^3)$ di $\mathbb{R}[X]_{\leq 3}$.
 - (b) L'applicazione ψ è suriettiva? È iniettiva?
 - (c) Trovare il nucleo di ψ .