

1 Inversa di una matrice

Definizione 1. Una matrice A quadrata di dimensione n si dice *invertibile* se esiste una matrice B di dimensione n con

$$AB = BA = I_n,$$

(dove I_n è la matrice identità di dimensione n).

La definizione di matrice invertibile è ridondante, nel senso che una sola delle condizioni $AB = I_n$, o $BA = I_n$ è sufficiente a garantire l'invertibilità della matrice. Per dimostrarlo, per prima cosa ricordiamo un risultato sulle trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ già visto in parte sulle dispense (Teorema 1.13.6).

Lemma 2. Se $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è una trasformazione lineare, le condizioni seguenti sono equivalenti:

1. T è iniettiva;
2. T è un isomorfismo;
3. esiste una trasformazione lineare $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $S \circ T$ è la funzione identità.

Dimostrazione. La prima equivalenza è dimostrata sulle dispense, mentre per $2 \Rightarrow 3$ basta considerare $S = T^{-1}$. È sufficiente quindi dimostrare che $3 \Rightarrow 1$: se esiste una trasformazione lineare $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $S \circ T$ è la funzione identità, dimostriamo che T è iniettiva: infatti, se $T(v) = T(v')$ allora $v = S \circ T(v) = S(T(v)) = S(T(v')) = S \circ T(v') = v'$. $\square$

Teorema 3. Una matrice A quadrata è invertibile se e solo se esiste una matrice B con $BA = I_n$ (equivalentemente: A è invertibile se e solo se esiste una matrice B con $AB = I_n$). Inoltre, se B è tale che $BA = I_n$ allora B coincide con A^{-1} .

Dimostrazione. Data una matrice A , sia L_A la trasformazione lineare $L_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che corrisponde ad A (cioè $L_A(v) = Av$, per ogni vettore colonna v di $\mathbb{R}^n$). Dalla Proposizione 1.10.3 delle dispense segue facilmente che la matrice A è invertibile se e solo se L_A è un isomorfismo da $\mathbb{R}^n$ in sé; dal Lemma precedente segue allora che A è invertibile se e solo se L_A è iniettiva, se e solo se esiste una trasformazione lineare T con $T \circ L_A = Id_{\mathbb{R}^n}$; vediamo come quest'ultima condizione sia equivalente a: esiste una matrice B tale che $BA = I_n$. Da sinistra a destra, data T basta considerare la matrice B della trasformazione T rispetto alla base canonica: da $T \circ L_A = Id_{\mathbb{R}^n}$ e dal Lemma (...) delle dispense segue $BA = I_n$ visto che A è la matrice di L_A rispetto alla base canonica; da destra a sinistra, data B basta considerare L_B e utilizzare il Lemma 1.10.3 delle dispense. $\square$

Utilizzando il teorema precedente e le operazioni elementari per righe possiamo dimostrare che il seguente metodo per il calcolo dell'inversa produce effettivamente l'inversa della matrice di partenza.

Teorema 4. Sia A una matrice quadrata di dimensione n . Consideriamo la matrice $n \times 2n$ in cui le prime n colonne coincidono con quelle della matrice I_n mentre le restanti n colonne sono quelle della matrice A . Se, mediante operazioni elementari sulle righe (scambio di due righe, moltiplicazione di una riga per una costante, sostituzione di una riga con la somma fra la riga stessa e un'altra riga moltiplicata per una costante) si raggiunge una matrice C in cui le ultime n colonne sono quelle della matrice I_n , allora A è invertibile e l'inversa coincide con la matrice $n \times n$ che si ottiene considerando le prime n colonne di C . In simboli (indicando con $a_1, \dots, a_n$ le colonne di A): se la matrice colonna $[e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_n]$ è riducibile tramite operazioni elementari per righe ad una matrice di tipo $[b_1, \dots, b_n, e_1, \dots, e_n]$, allora la matrice $B = [b_1, \dots, b_n]$ è l'inversa di A .

Dimostrazione. È facile dimostrare che ogni trasformazione elementare sulle righe di una matrice D qualsiasi può essere ottenuta moltiplicando a sinistra D per un'opportuna matrice. Ad esempio, per scambiare due righe i, j della matrice D è sufficiente moltiplicare D a sinistra per la matrice che ha per i -esima riga il vettore e_j , per j -esima riga il vettore e_i e nelle altre righe k (diverse dalla i -esima e dalla j -esima) il vettore riga e_k : ad esempio per scambiare la prima e la seconda riga di una matrice 4×4 basta moltiplicare a sinistra la matrice data per la matrice riga

$$\begin{pmatrix} e_2 \\ e_1 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi, partendo dalla matrice colonna $[e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_n]$, se otteniamo con trasformazioni elementari sulle righe la matrice $[b_1, \dots, b_n, e_1, \dots, e_n]$, moltiplicando fra loro tutte le matrici relative a queste operazioni elementari otteniamo una matrice M tale che $M[e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_n] = [b_1, \dots, b_n, e_1, \dots, e_n]$. Se descriviamo M come matrice colonna $M = [m_1, \dots, m_n]$, otteniamo:

$$M[e_1, \dots, e_n, a_1, \dots, a_n] = [Me_1, \dots, Me_n, Ma_1, \dots, Ma_n] = [b_1, \dots, b_n, e_1, \dots, e_n].$$

Ma, poiché $Me_i = m_i$ e $Ma_1, \dots, Ma_n$ sono le colonne della matrice MA , ne segue che M è uguale a B e che $MA = I_n$. Quindi $M = B$ e per il teorema precedente otteniamo $B = A^{-1}$. $\square$

Esempio: sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Poiché

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -1,$$

ne deduciamo che A è invertibile. Determiniamo ora la sua inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Inversa della matrice con il metodo dei complementi

Una formula esplicita (anche se computazionalmente piuttosto onerosa...) per il calcolo dell'inversa è la seguente. Sia A una matrice quadrata $n \times n$ invertibile e sia $A_{i,j}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ che si ottiene da A cancellando l' i -esima riga e la j -esima colonna (questa matrice è detta matrice complementare dell'elemento $a_{i,j}$). Allora $A^{-1} = \det(A)^{-1}(c_{i,j})$ dove

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{j,i})$$

(notare l'inversione degli indici).

Esempio: sia A la matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si ha $\det(A) = -1$ e, ad esempio

$$c_{2,1} = (-1)^3 \det(A_{1,2}) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

Quindi il coefficiente di posto 2,1 di A^{-1} è uguale a $\det(A)^{-1}c_{2,1} = 1$ in accordo con quanto visto nell'esempio precedente.

3 Regola di Cramer

Teorema 5. *Se A è una matrice di dimensione n , allora il sistema lineare $Ax = b$ ha un'unica soluzione se e solo se $\det(A) \neq 0$. In questo caso, se le colonne della matrice A sono $a_1, \dots, a_n$, la componente x_i dell'unica soluzione del sistema è uguale al prodotto fra $(\det(A))^{-1}$ e il determinante della matrice ottenuta dalla matrice colonna $A = [a_1, \dots, a_n]$ sostituendo l' i -esima colonna con il vettore colonna b :*

$$x_i = (\det(A))^{-1} \det[a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n].$$

Dimostrazione. Se $\det(A) \neq 0$ allora A ha un'inversa A^{-1} e l'unica soluzione si ottiene moltiplicando a sinistra il sistema $Ax = b$ per A^{-1} : da $A^{-1}Ax = A^{-1}b$ segue che $x = A^{-1}b$ è l'unica soluzione possibile. Viceversa, se il sistema ha un'unica soluzione vuol dire che lo spazio affine $Sol(A, b)$ ha dimensione zero che è anche la dimensione lo spazio vettoriale $Sol(A, 0) = Ker(L_A)$. Ne segue che L_A è iniettiva, quindi invertibile per il Lemma 3. Esiste quindi un unico x per cui $L_A(x) = b$ e questo x è anche l'unica soluzione del sistema $Ax = b$.

Nel caso in cui $\det(A) \neq 0$, possiamo scrivere l'unica soluzione $x = A^{-1}b$ anche nel modo seguente. Ricordiamo che $A^{-1} = (\det(A))^{-1}C$ dove $C = (c_{i,j})$ e

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(A_{j,i}),$$

dove $A_{j,i}$ è la matrice complementare dell'elemento $a_{j,i}$ nella matrice A ; ne segue che l' i -esima componente x_i della soluzione è

$$\begin{aligned} x_i &= (\det(A))^{-1} (c_{i,1}b_1 + c_{i,2}b_2 + \dots + c_{i,n}b_n) = \\ &= (\det(A))^{-1} ((-1)^{1+i} \det(A_{1,i})b_1 + (-1)^{2+i} \det(A_{2,i})b_2 + \dots + (-1)^{n+i} \det(A_{n,i})b_n). \end{aligned}$$

Notiamo infine che l'espressione $((-1)^{1+i} \det(A_{1,i})b_1 + (-1)^{2+i} \det(A_{2,i})b_2 + \dots + (-1)^{n+i} \det(A_{n,i})b_n)$ è pari allo sviluppo di Laplace sulla i -esima colonna della matrice colonna $[a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n]$. $\square$