

1 Addendum su Diagonalizzazione

Vedere le dispense per le definizioni di autovettore, autovalore e di trasformazione lineare (o matrice) diagonalizzabile. In particolare, si ricorda che una condizione necessaria e sufficiente per la diagonalizzabilità di un operatore $F : V \rightarrow V$ è che V abbia una base composta da autovettori.

Lemma 1. *Data una trasformazione lineare $F : V \rightarrow V$ con $\dim(V) = n$, sia $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ un sottoinsieme degli autovalori di F e $V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}$ i corrispondenti autospazi. Se $W_i \subseteq V_{\lambda_i}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti per ogni $i = 1, \dots, k$ allora $W_1 \cup \dots \cup W_k$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti di V .*

Dimostrazione. Per induzione su k : se $k = 1$ il risultato è ovvio, visto che il sottoinsieme W_1 di V_{λ_1} contiene vettori linearmente indipendenti per ipotesi. Nel passo induttivo, supponiamo $k > 1$. Se per assurdo i vettori in $W_1 \cup \dots \cup W_k$ fossero linearmente dipendenti, allora, ponendo $W_1 = \{v_{1,1}, \dots, v_{1,n_1}\}$, $W_2 = \{v_{2,1}, \dots, v_{2,n_2}\}, \dots, W_k = \{v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k}\}$, esisterebbero dei coefficienti $c_{i,j}$ tali che

$$c_{1,1}v_{1,1} + \dots + c_{1,n_1}v_{1,n_1} + c_{2,1}v_{2,1} + \dots + c_{2,n_2}v_{2,n_2} + \dots + c_{k,1}v_{k,1} + \dots + c_{k,n_k}v_{k,n_k} = \vec{0}.$$

Applicando F all'equazione precedente e ricordando che i vettori $v_{i,h}$ di W_i sono autovettori con autovalore λ_i , si ottiene:

$$F(c_{1,1}v_{1,1} + \dots + c_{1,n_1}v_{1,n_1} + c_{2,1}v_{2,1} + \dots + c_{2,n_2}v_{2,n_2} + \dots + c_{k,1}v_{k,1} + \dots + c_{k,n_k}v_{k,n_k}) = c_{1,1}\lambda_1 v_{1,1} + \dots + c_{1,n_1}\lambda_1 v_{1,n_1} + c_{2,1}\lambda_2 v_{2,1} + \dots + c_{2,n_2}\lambda_2 v_{2,n_2} + \dots + c_{k,1}\lambda_k v_{k,1} + \dots + c_{k,n_k}\lambda_k v_{k,n_k} = \vec{0};$$

Moltiplicando per λ_1 la prima equazione sottraendo al risultato ottenuto l'ultima l'equazione, vediamo che gli addendi relativi alla base B_1 scompaiono, lasciando:

$$c_{2,1}(\lambda_1 - \lambda_2)v_{2,1} + \dots + c_{2,n_2}(\lambda_1 - \lambda_2)v_{2,n_2} + \dots + c_{k,1}(\lambda_1 - \lambda_k)v_{k,1} + \dots + c_{k,n_k}(\lambda_1 - \lambda_k)v_{k,n_k} = \vec{0}$$

Poiché il sottoinsieme di autovalori $\{\lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ di F ha $k - 1$ elementi, possiamo utilizzare l'ipotesi induttiva: i vettori in $W_2 \cup \dots \cup W_k$ sono quindi linearmente indipendenti e dall'equazione precedente ne segue:

$$c_{2,1}(\lambda_1 - \lambda_2) = \dots = c_{2,n_2}(\lambda_1 - \lambda_2) = \dots = c_{k,1}(\lambda_1 - \lambda_k) = \dots = c_{k,n_k}(\lambda_1 - \lambda_k) = 0.$$

Da $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, \dots, \lambda_1 - \lambda_k \neq 0$ segue $c_{2,1} = 0, c_{2,2} = 0, \dots, c_{2,n_2} = 0, \dots, c_{k,1} = 0, \dots, c_{k,n_k} = 0$. Tornando alla prima equazione e cancellando i termini che ora sappiamo essere nulli si ottiene anche

$$c_{1,1}v_{1,1} + c_{1,2}v_{1,2} + \dots + c_{1,n_1}v_{1,n_1} = \vec{0};$$

dall'indipendenza lineare di vettori in B_1 otteniamo che anche gli ultimi coefficienti sono nulli: $c_{1,1} = \dots = c_{1,n_1} = 0$.

Abbiamo quindi dimostrato che l'unica combinazione lineare nulla di vettori in $W_1 \cup \dots \cup W_k$ è quella che ha tutti i coefficienti nulli, quindi i vettori in $W_1 \cup \dots \cup W_k$ sono linearmente indipendenti. $\square$

Corollario 2. *Una trasformazione lineare $F : V \rightarrow V$ con $\dim(V) = n$ è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni di tutti i suoi autospazi è n .*

Dimostrazione. Supponiamo per prima cosa che F sia diagonalizzabile e che abbia come insieme di autovalori l'insieme $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. Poiché F è diagonalizzabile, esiste una base B di V composta da n autovettori. Sia W_1 il sottoinsieme composto dagli autovettori di B che hanno autovalore λ_1 , W_2 il sottoinsieme composto dagli autovettori di B che hanno autovalore λ_2 , $\dots$, W_k il sottoinsieme composto dagli autovettori di B che hanno autovalore λ_k . Se n_i è la cardinalità di W_i , per $i = 1, \dots, k$ abbiamo che $n_1 + \dots + n_k = n$. Ci basta allora dimostrare che W_i è una base per V_{λ_i} . I vettori di W_i sono linearmente indipendenti perché appartengono alla base B , quindi ci basta dimostrare che l'insieme W_i genera l'autospazio V_{λ_i} : se così non fosse, potrei trovare una base D di V_{λ_i} di cardinalità $d > n_i$. Dal teorema precedente seguirebbe che $W_1 \cup \dots \cup W_{i-1} \cup D \cup W_{i+1} \cup \dots \cup W_k$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti. Ma la cardinalità di questo insieme è $n_1 + \dots + n_{i-1} + d + n_{i+1} + \dots + n_k > n$, una contraddizione.

Viceversa, supponiamo che la somma delle dimensioni degli autospazi sia n ; se B_i è una base per l'autospazio V_{λ_i} sappiamo dal precedente teorema che $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ è un sottoinsieme di vettori linearmente indipendenti; poiché la cardinalità n di B è uguale alla dimensione di V , ne segue che B è una base di autovettori di F ed F è quindi diagonalizzabile. $\square$

Data una trasformazione lineare F , definiamo il *polinomio caratteristico* $p(\lambda)$ di F (nella variabile λ) come il determinante della matrice $A - \lambda I$ dove A è una matrice che rappresenta F rispetto ad una qualsiasi base. Questa definizione è ben posta perché non dipende dalla scelta della base. Infatti, se A, B rappresentano F rispetto a due basi differenti, sappiamo che esiste P invertibile tale che $A = P^{-1}BP$; ma allora $\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}BP - \lambda I) = \det(P^{-1}(B - \lambda I)P) = \det(P^{-1})\det(B - \lambda I)\det(P) = \det(P)^{-1}\det(B - \lambda I)\det(P) = \det(B - \lambda I)$. Si dimostra (vedi dispense) che le radici reali del polinomio caratteristico sono esattamente gli autovalori di F .

Definizione 3. La *molteplicità algebrica* di un autovalore λ_i è la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico: è pari a k se vale $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k q(\lambda)$ dove $q(\lambda)$ è un polinomio tale che $q(\lambda_i) \neq 0$.

Definizione 4. La *molteplicità geometrica* di un autovalore λ_i è la dimensione del suo autospazio V_{λ_i} .

Teorema 5. (senza dimostrazione) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre minore o uguale della sua molteplicità algebrica.

Il prossimo teorema (che enunciamo senza dimostrazione) dà un'ulteriore caratterizzazione delle trasformazioni lineari diagonalizzabili

Teorema 6. Una trasformazione lineare $F : V \rightarrow V$ con $\dim(V) = n$ è diagonalizzabile se e solo se

1. la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è n ;
2. la molteplicità algebrica di ogni autovalore è uguale alla sua molteplicità geometrica.

Esempio 7.

Sia $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la trasformazione lineare definita da

$$F(x, y, z) = (x + 3y + 3z, -3x - 5y - 3z, 3x + 3y + z).$$

Determinare:

1. il polinomio caratteristico di F ed i suoi autovalori;
2. la dimensione degli autospazi relativi agli autovalori e una base di ogni autospazio;
3. se F è diagonalizzabile; in tal caso trovare una matrice diagonale D e una matrice invertibile P tale che $D = P^{-1}AP$;

Dimostrazione. La trasformazione F è rappresentata, rispetto alla base canonica per dominio e codominio, dalla seguente matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Il polinomio caratteristico $p(\lambda)$ è $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$. Si ha (operando sia per righe che per colonne):

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+2)^2(\lambda-1). \end{aligned}$$

Gli autovalori di F sono le radici del polinomio caratteristico; abbiamo quindi due autovalori $\lambda_1 = 1$, di molteplicità algebrica uguale ad 1, e $\lambda_2 = -2$, di molteplicità algebrica uguale a 2.

L'autospazio V_1 è dato da tutti i vettori che sono soluzioni dell'equazione $Av = v$ ovvero $(A - I)v = \vec{0}$. Poiché la molteplicità algebrica dell'autovalore 1 è 1, sappiamo già che anche la sua molteplicità geometrica, cioè la dimensione dell'autospazio V_1 , sarà 1: infatti, non può essere 0 e deve essere minore della molteplicità algebrica. Inoltre, un vettore $v = (x, y, z)$ è un autovettore relativo all'autovalore 1 se e solo se è soluzione del sistema omogeneo:

$$\begin{cases} 3y + 3z = 0 \\ -3x - 6y - 3z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$$

□

Con operazioni elementari sulle righe raggiungiamo facilmente il sistema a scala seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Dal sistema precedente, utilizzando il parametro k per la variabile z che non corrisponde ad alcun pivots e risolvendo otteniamo che $V_1 = \{(k, -k, k) : k \in \mathbb{R}\}$. Quindi una base dell'autospazio V_1 è data da $B_1 = ((1, -1, 1))$.

Per quanto riguarda l'autovalore $\lambda = -2$ dobbiamo risolvere il sistema $(A + 2I)v = \vec{0}$, ovvero

$$\begin{cases} 3x + 3y + 3z = 0 \\ -3x - 3y - 3z = 0 \\ 3x + 3y + 3z = 0 \end{cases}$$

Con operazioni elementari sulle righe raggiungiamo facilmente il sistema a scala seguente:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \end{cases}$$

Dal sistema precedente, utilizzando i parametri h, k per le variabili y, z che non corrispondono ad alcun pivots e risolvendo otteniamo che $V_{-2} = \{(-h - k, h, k) : k \in \mathbb{R}\}$. Quindi l'autospazio V_{-2} ha dimensione 2 e una base è data da $B_2 = ((-1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ (notiamo che la dimensione geometrica dell'autovalore è uguale alla dimensione algebrica che è 2). L'insieme $B = B_1 \cup B_2$ ha cardinalità 3 ed è quindi una base di autovettori della trasformazione F che risulta diagonalizzabile.

La matrice D che diagonalizza A è la matrice di F rispetto alla base di autovettori B :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Per passare dalla matrice A alla matrice D dobbiamo trovare la matrice del cambiamento di base:

$$P = M_{\mathcal{E}}^B(id),$$

dove $\mathcal{E}$ è la base canonica; infatti sappiamo che $D = P^{-1}AP$ (e $P^{-1} = M_B^{\mathcal{E}}(id)$).

Poiché a $\mathcal{E}$ è la base canonica, la prima colonna di $M_{\mathcal{E}}^B(id)$ è data dal primo autovettore della base B , la seconda dal secondo vettore, la terza dal terzo. Quindi

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Per quanto riguarda P^{-1} oltre a calcolarla come inversa della matrice P , possiamo anche calcolarla usando l'uguaglianza $P^{-1} = M_B^{\mathcal{E}}(id)$: in questo caso la prima colonna è data dalle coordinate del primo vettore della base canonica rispetto alla base B . Cerchiamo quindi i tre coefficienti x, y, z tali che $(1, 0, 0) = x(1, -1, 1) + y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1)$; equivalentemente, dobbiamo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -x + y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

che si risolve facilmente con $x = 1, y = 1, z = -1$. Quindi la prima colonna di $M_B^{\mathcal{E}}(id)$ è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si procede analogamente con le altre colonne trovando infine:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esempio 8.

Sia F una trasformazione lineare che, rispetto alla base canonica per dominio e codominio è rappresentata dalla seguente matrice 3×3 :

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinare:

1. il polinomio caratteristico di F e i suoi autovalori;
2. la dimensione degli autospazi relativi agli autovalori e una base di ogni autospazio;
3. se F è diagonalizzabile.

Dimostrazione. Facendo i calcoli si scopre che il polinomio caratteristico è lo stesso dell'esempio precedente, quindi la matrice ha come autovalori i numeri $1, -2$. Per determinare l'autospazio V_{-2} , dobbiamo risolvere il sistema $(B + 2I)v = \vec{0}$, ovvero

$$\begin{cases} 4x & +4y & +3z & = 0 \\ -4x & -4y & -3z & = 0 \\ 3x & +3y & +3z & = 0 \end{cases}$$

che, tramite riduzioni a scala, è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x & +y & +z & = 0 \\ & & z & = 0 \end{cases}$$

Dal sistema precedente, utilizzando il parametro k per la variabile y che non corrisponde ad alcun pivots e risolvendo otteniamo che $V_{-2} = \{(-k, k, 0) : k \in \mathbb{R}\}$. Quindi l'autospazio V_{-2} ha dimensione 1 e una base è data da $B_2 = ((-1, 1, 0),)$. Notiamo però che la dimensione geometrica dell'autovalore è minore della dimensione algebrica dell'autovalore (che è 2), quindi la matrice non è diagonalizzabile $\square$

2 Esercizi

1. Nei casi seguenti, stabilisci quando il vettore v è un autovettore della matrice A . Se la risposta è affermativa, trova il corrispondente autovalore.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad v = (1, -2, 2).$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad v = (1, 0, 1).$$

Sol. (a) No, (b) Sì, $\lambda = 2$

2. Costruisci una matrice A che abbia il vettore $v = (1, 1, 1)$ come autovettore con autovalore $\lambda = 3$. Rispondi alla stessa domanda con $v = (-1, 0, 1)$ e $\lambda = 5$.
3. Nei casi seguenti, stabilisci quando il numero λ è un autovalore della matrice A . Se la risposta è affermativa, trova una base dell'autospazio corrispondente:

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 4$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \lambda = 2$$

Sol. (a) si : per trovare una base di V_4 bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} -x & -z & = 0 \\ 2x & -y & +z = 0 \\ -3x & +4y & +z = 0 \end{cases}$$

Riducendo ad un sistema a scala troviamo che $V_4 = \{(-k, -k, k) : k \in \mathbb{R}\}$ ha dimensione 1 e una sua base è, ad esempio $B = ((-1, -1, 1))$

(b) no, gli autovalori sono 3 e 5.

4. Stabilire se la seguente matrice A è diagonalizzabile:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

In caso affermativo, trova una base B di $\mathbb{R}^4$ formata da autovettori di A , la matrice D che diagonalizza A e la matrice P tale che $D = P^{-1}AP$.

Sol A è diagonalizzabile. Una base di autovettori è, ad esempio, $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ dove $v_1 = (-8, 4, 1, 0)$, $v_2 = (-16, 4, 0, 1)$, $v_3 = (0, 0, 1, 0)$, $v_4 = (0, 0, 0, 1)$. Nota bene: i due autovettori v_3, v_4 relativi all'autovalore $\lambda = -3$ si trovano senza fare conti, semplicemente guardando le colonne della matrice...

5. Dimostra che per una matrice triangolare superiore gli autovalori sono i numeri che compaiono sulla diagonale principale.
6. Dimostra che una trasformazione lineare (una matrice A) ha come autovalore 0 se e solo se non è invertibile.
7. Si consideri le trasformazioni lineari $F_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (una per ogni parametro $t \in \mathbb{R}$) definite dalle seguenti equazioni:

$$F_t(e_1) = (1, 0, -t), F_t(e_2) = (0, -1, 0), F_t(e_3) = (0, 0, 1).$$

- (a) Considera la trasformazione F_1 . Quanto vale sul generico vettore (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$?
- (b) Scrivi la matrice di F_1 rispetto alla base canonica per dominio e codominio e la matrice della trasformazione F_0 sempre rispetto alla base canonica.
- (c) Fissato un parametro t , scrivi la matrice di F_t rispetto alla base canonica per dominio e codominio.
- (d) Determinare gli autovalori di F_1 e se F_1 è diagonalizzabile.
- (e) Determinare gli autovalori di F_0 e se F_0 è diagonalizzabile.
- (f) Determinare, per un generico valore del parametro t , gli autovalori della trasformazione lineare F_t .
- (g) Determinare per quali valori del parametro t la trasformazione lineare F_t è diagonalizzabile.