1. Cambiamenti di base

(1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 2 su R e $B = (v_1, v_2)$, $B' = (w_1, w_2)$ due basi per V tali che $v_1 = 6w_1 - 2w_2$ e $v_2 = 9w_1 - 4w_2$.
   (a) Determina la matrice del cambiamento di base $M^B_{B'}(id)$;
   (b) Trova le coordinate $[v]_{B'}$ per il vettore $v = -3v_1 + 3v_2$.

(2) Nello spazio vettroriale $\mathbb{R}^2$ considera i seguenti vettori: $v_1 = (-9, 1), v_2 = (-5, -1), w_1 = (1, -4), w_2 = (3, -5)$.
   (a) Dimostra che $B = (v_1, v_2)$ e $B' = (w_1, w_2)$ sono basi di $\mathbb{R}^2$;
   (b) determina il vettore $v \in \mathbb{R}^2$ tale che $[v]_B = (-1, 1)$;
   (c) determina la matrice $M^B_{B'}(id)$ del cambiamento di base; utilizzando questa matrice, trova le coordinate $[v]_{B'}$ del vettore v rispetto alla base B'.
   (d) Determina anche la matrice $M^{B'}_B(id)$; chi è $M^B_{B'}(id)M^{B'}_B(id)$? (senza fare calcoli...)

   SOL: $v = -v_1 + v_2 = (4, -2)$, $\quad M^B_{B'}(id) = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$,
   $[v]_{B'} = (-2, 2)$, $\quad M^{B'}_B(id) = \begin{pmatrix} -3/2 & -2 \\ 5/2 & 3 \end{pmatrix}$

(3) Sia $M^B_{B'}(id) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice del cambiamento di base dalla base $B = (v_1, v_2, v_3)$ alla base $B' = (w_1, w_2, w_3)$ dello spazio vettoriale V. Se $w_1 = (-2, 2, 3), w_2 = (-8, 5, 2), w_3 = (-7, 2, 6)$, chi sono v_1, v_2 e v_3?

(4) Sia F la trasformazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$F(x, y) = (x + y, 0, x - y).$$

   (a) Determinare la matrice $M^B_{B'}(F)$ associata ad F rispetto alle basi canoniche $B = (e_1, e_2)$ del dominio e $B' = (e_1, e_2, e_3)$ del codominio.
   (b) Considerare i vettori $u_1 = (2, 1), u_2 = (1, 0)$ e verificare che tali vettori formano una base $B'' = (u_1, u_2)$ per $\mathbb{R}^2$; trovare la matrice $M^{B''}_{B'}(F)$ associata ad F considerando la base B'' per il dominio e la base canonica B' per il codominio.
   (c) Trovare la matrice del cambiamento di base $M^{B''}_B(id)$.
   (d) Esprimere la matrice $M^{B''}_{B'}(F)$ tramite le matrici $M^{B''}_B(id)$ e $M^B_{B'}(F)$.

$$\textbf{SOL} : M^B_{B'}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{B''}_B(id) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{B''}_{B'}(F) == \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Se (e_1, e_2, e_3) è la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e u_1, u_2, u_3 sono tali che :

$$e_1 = u_1 + u_2, \quad e_2 = -u_2, \quad e_3 = u_3,$$

dimostra che (u_1, u_2, u_3) è ancora una base per $\mathbb{R}^3$.

Considera il vettore $v = (3, 2, 1)$ e scrivilo prima come combinazione lineare degli elementi della base canonica e poi come combinazione lineare degli elementi della base (u_1, u_2, u_3).

Considera il vettore $v = u_1 + u_2 - u_3$ e scrivilo come combinazione lineare dei vettori della base canonica.

Sia $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare indotta dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

relativamente alle basi cononiche del dominio e codominio.

Trova la matrice di F rispetto alla base canonica del dominio e alla base (u_1, u_2, u_3) del codominio.