1 Calcolo del rango di un matrice

Il rango di una matrice con m righe e n colonne è, per definizione, il massimo numero di colonne linearmente indipendenti della matrice (considerate come vettori di R^m). Si può dimostrare che il rango è anche il massimo numero di *righe* linearmente indipendenti della matrice. Abbiamo visto che il rango di una matrice è uno strumento importante, usato ad esempio per determinare la dimensione dell'immagine di una trasformazione lineare e quindi utile anche nella risoluzione dei sistemi lineari. È quindi importante saper calcolare il rango di una matrice. Il prossimo teorema permette di calcolare il rango di una matrice tramite la nozione di determinante. Un *minore* di una matrice A di dimensioni $m \times n$ è il determinante di una matrice quadrata *estratta* dalla matrice A: fissato $t \leq m, n$ si fissano t righe $i_1, \ldots, i_t$ e k colonne di A $j_1, \ldots j_t$ e si considera il determinante della matrice quadrata di dimensione k che ha come coefficienti gli elementi di A che si trovano all'incrocio fra le righe e le colonne fissate. Se denotiamo tale matrice con $A(i_1, \ldots, i_t / j_1, \ldots j_t) = (c_{h,k})$ si ha $c_{h,k} = a_{i_h, j_k}$. Tale determinante è detto *minore* di ordine t della matrice quadrata; Equivalentemente, un minore di ordine t è il determinante di una matrice quadrata di dimensione t ottenuta da A eliminando un certo numero di righe e/o colonne.

Esempio 1. Se

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & -\sqrt{2} \\ -4 & 8 & -3 & \pi \\ 3 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

possiamo estrarre da A la matrice quadrata $A(1, 3/2, 4)$:

$$A(1, 3/2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ 6 & 0 \end{pmatrix};$$

equivalentemente, questa matrice si ottiene da A cancellando la seconda riga e la prima e terza colonna. Un minore di ordine 2 di A è quindi dato da $det A(1, 3/2, 3) = 6\sqrt{2}$.

Teorema 2. *Il rango di A è dato dall'ordine massimo dei suoi minori non nulli.*

Non dimostreremo questo teorema, limitandoci ad osservare come un minore non nullo di ordine t determini t colonne di A (o righe) linearmente indipendenti. Nell'esempio precedente, se $t = 2$ abbiamo la sottomatrice quadrata

$$A(1, 3/2, 3) = \begin{pmatrix} 4 & -\sqrt{2} \\ 6 & 0 \end{pmatrix};$$

Vedremo come il fatto che tale minore sia non nullo implichi che le colonne

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \pi \\ 0 \end{pmatrix}$$

che la sottomatrice determina in A siano vettori linearmente indipendenti.

Siano $a_1, \ldots, a_n$ le colonne di A. Per semplificare la notazione supponiamo che A abbia dimensione $m \times n$ con $m \leq n$ e che che il minore non nullo sia quello determinato dalla sottomatrice quadrata $A' = A(1, \ldots, t/1, \ldots, t)$ delle prime t righe e t colonne di A. Facciamo quindi vedere che, se $det A(1, \ldots, t/1, \ldots, t) \neq 0$, le colonne $a_1, \ldots, a_t$ di A sono indipendenti. Se così non fosse, esisterrebbero coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ in $\mathbb{R}$, non tutti nulli, tali che $\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_t a_t = 0$. Se indichiamo con $a'_1, \ldots a'_t$ le colonne di $A' = A(1, \ldots, t/1, \ldots, t)$ avremo anche che $\lambda_1 a'_1 + \ldots + \lambda_t a'_t = 0$ e quindi il vettore $(\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ sarebbe una soluzione non nulla del sistema lineare

$$A' \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_t \end{pmatrix} = 0;$$

questo non è possibile perché, visto che $det(A') \neq 0$ il sistema di cui sopra ha come unica soluzione il vettore nullo.

2 Esercizi

1. Calcolare il rango della matrice A dell'esempio 1e trovare una una base per il sottospazio lineare $L(a_1, a_2, a_3, a_4)$ dove a_i è l'iesima colonna della matrice.

2. Stesso esercizio, ma con la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$